

命題と条件（必要・十分）

解答（全23問）

氏名 _____

得点 _____ / 23点

DRILL

練習問題（全18問）

基本（1～6）

1

真偽判定

命題「 $x = 5$ ならば $x^2 = 25$ 」の真偽を答えよ（真/偽を入力）。

答え 真

$x = 5$ を代入すると $x^2 = 5^2 = 25$ となり成り立つ。

真

2

真偽判定+反例

命題「 $x^2 = 25$ ならば $x = 5$ 」の真偽を答え、偽ならば反例となる x の値を求めよ。

真偽 偽 反例 $x =$ -5

$x^2 = 25$ を満たすのは $x = 5$ と $x = -5$ 。 $x = -5$ のとき $x^2 = 25$ は成り立つが $x = 5$ は成り立たない。

偽 (反例: $x = -5$)

3

十分・必要の判定

p :「 n は9の倍数」、 q :「 n は3の倍数」とする。 p は q であるための何条件か (十分/必要/必要十分/どちらでもない を入力)。

答え 十分

$p \Rightarrow q$: 9の倍数は $9 = 3 \times 3$ なので必ず3の倍数でもある。真。

$q \Rightarrow p$: $n = 3$ は3の倍数だが9の倍数ではない。反例があるので偽。

十分条件 (必要条件ではない)

4

十分・必要の判定 (3の逆)

p :「 n は3の倍数」、 q :「 n は9の倍数」とする。 p は q であるための何条件か。

答え 必要

$p \Rightarrow q$: $n = 3$ は3の倍数だが9の倍数ではない。反例があるので偽。

$q \Rightarrow p$: 9の倍数は必ず3の倍数でもある。真。

必要条件 (十分条件ではない)

5

十分・必要の判定（不等式）

p : 「 $x > 4$ 」、 q : 「 $x > 1$ 」 とする。 p は q であるための何条件か。

答え 十分

$p \Rightarrow q$: $x > 4$ ならば当然 $x > 1$ 。真。

$q \Rightarrow p$: $x = 2$ は $x > 1$ を満たすが $x > 4$ は満たさない。反例があるので偽。

十分条件（必要条件ではない）

6

十分・必要の判定（図形）

p : 「四角形ABCDは正方形である」、 q : 「四角形ABCDは長方形である」 とする。 p は q であるための何条件か。

答え 十分

$p \Rightarrow q$: 正方形は4つの角がすべて直角なので、必ず長方形でもある。真。

$q \Rightarrow p$: 縦横の長さが違う長方形は正方形ではない。反例があるので偽。

十分条件（必要条件ではない）

標準（7～14）

7

p : 「 $x = 3$ 」、 q : 「 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 」 とする。 p は q であるための何条件か。

答え 十分

$p \Rightarrow q$: $x = 3$ のとき $9 - 15 + 6 = 0$ 。真。

$q \Rightarrow p$: $x^2 - 5x + 6 = 0$ を解くと $(x - 2)(x - 3) = 0$ より $x = 2, 3$ 。 $x = 2$ は反例。偽。

十分条件（必要条件ではない）

- 8 $p:「x^2 - 5x + 6 = 0」$ 、 $q:「x = 3」$ とする (7の p, q を入れ替えたもの)。 p は q であるための何条件か。

答え 必要

$p \Rightarrow q: x^2 - 5x + 6 = 0$ の解は $x = 2, 3$ 。 $x = 2$ は p を満たすが q ($x = 3$) を満たさない。反例があり偽。

$q \Rightarrow p: x = 3$ ならば $9 - 15 + 6 = 0$ が成り立つ。真。

必要条件 (十分条件ではない)

- 9 $p:「x = 4」$ 、 $q:「2x - 8 = 0」$ とする。 p は q であるための何条件か。

答え 必要十分

$p \Rightarrow q: x = 4$ のとき $2 \times 4 - 8 = 0$ 。真。

$q \Rightarrow p: 2x - 8 = 0$ を解くと $x = 4$ 。真。

両方の矢印が真なので同値。

必要十分条件

- 10 $p:「x > 1」$ 、 $q:「x < 8」$ とする。 p は q であるための何条件か。

答え どちらでもない

$p \Rightarrow q: x = 100$ は $x > 1$ を満たすが $x < 8$ は満たさない。反例があり偽。

$q \Rightarrow p: x = -5$ は $x < 8$ を満たすが $x > 1$ は満たさない。反例があり偽。

どちらも偽なので無関係。

どちらでもない

11

集合を使った判定

p : 「 $x \in \{2, 4, 6\}$ 」、 q : 「 x は偶数」とする。 p は q であるための何条件か。

答え 十分

$p \Rightarrow q$: 2, 4, 6 はすべて偶数。真。

$q \Rightarrow p$: $x = 8$ は偶数だが集合 $\{2, 4, 6\}$ の要素ではない。反例があり偽。

十分条件（必要条件ではない）

12

真偽判定+反例

命題「自然数 n が素数ならば n は奇数である」の真偽を答え、偽ならば反例となる n の値を求めよ。

真偽 偽 反例 $n =$ 2

素数は「1とその数自身以外に約数を持たない2以上の整数」。 $n = 2$ は素数だが偶数なので、奇数であるという結論が成り立たない。

偽（反例： $n = 2$ ）

13

否定を作る（ド・モルガン）

条件「 x は2の倍数である、かつ、 x は3の倍数である」の否定を、ド・モルガンの法則を用いて作れ。

「 p かつ q 」の否定は「 p でない、または q でない」。

「 x は2の倍数でない、または、 x は3の倍数でない」

14

「かつ」を含む条件

p :「 $x > 1$ かつ $x < 4$ 」、 q :「 $x > 0$ 」とする。 p は q であるための何条件か。

答え 十分

$p \Rightarrow q$: $1 < x < 4$ ならば $x > 1 > 0$ なので $x > 0$ 。真。

$q \Rightarrow p$: $x = 100$ は $x > 0$ を満たすが $1 < x < 4$ は満たさない。反例があり偽。

十分条件 (必要条件ではない)

挑戦 (15~18)

15

2乗と不等式 (混同注意)

p :「 $x > 2$ 」、 q :「 $x^2 > 4$ 」とする (x は実数)。 p は q であるための何条件か。

答え 十分

$p \Rightarrow q$: $x > 2$ ならば x は正で2より大きいので、2乗すると $x^2 > 4$ 。真。

$q \Rightarrow p$: $x = -3$ は $x^2 = 9 > 4$ を満たすが $x > 2$ は満たさない。反例があり偽。

十分条件 (必要条件ではない)

16

15の逆・混同しやすい組

p :「 $x^2 > 4$ 」、 q :「 $x > 2$ 」とする (x は実数、15の p, q を入れ替えたもの)。 p は q であるための何条件か。

答え 必要

$p \Rightarrow q$: $x = -3$ は $x^2 = 9 > 4$ を満たすが $x > 2$ は満たさない。反例があり偽 ($x^2 > 4$ は $x > 2$ だけでなく $x < -2$ の場合も含むことに注意)。

$q \Rightarrow p$: $x > 2$ ならば $x^2 > 4$ 。真。

必要条件 (十分条件ではない)

p : 「三角形ABCは正三角形である」、 q : 「三角形ABCの3つの内角はすべて 60° である」とする。 p は q であるための何条件か。

答え 必要十分

$p \Rightarrow q$: 正三角形は3辺がすべて等しいので、二等辺三角形の性質（底角が等しい）を2回使うと3つの内角もすべて等しく、和が 180° であることから各角は 60° になる。

真。

$q \Rightarrow p$: 3つの内角がすべて 60° ならば、少なくとも2つの角が等しい二等辺三角形が2組できることになり、結局3辺すべてが等しくなる。真。

必要十分条件

p : 「 n は4の倍数、または n は6の倍数」、 q : 「 n は2の倍数」とする。 p は q であるための何条件か。

答え 十分

$p \Rightarrow q$: 4の倍数も6の倍数も、どちらも2で割り切れるので必ず2の倍数。真。

$q \Rightarrow p$: $n = 2$ は2の倍数だが、4の倍数でも6の倍数でもない。反例があり偽。

十分条件（必要条件ではない）

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

絶対値・混同しやすい組

命題「実数 x について、 $|x| = 3$ ならば $x = 3$ 」の真偽を答え、偽ならば反例となる x の値を求めよ。

真偽 偽 反例 $x =$ -3

絶対値の定義より $|x| = 3$ を満たす実数は $x = 3$ と $x = -3$ の2つ。 $x = -3$ のとき $|x| = 3$ は成り立つが $x = 3$ は成り立たない。

偽（反例： $x = -3$ ）

応2

2乗の和と必要十分

実数 x, y について、 p : 「 $x = 0$ かつ $y = 0$ 」、 q : 「 $x^2 + y^2 = 0$ 」とする。 p は q であるための何条件か。

答え 必要十分

$p \Rightarrow q$: $x = 0, y = 0$ ならば $x^2 + y^2 = 0 + 0 = 0$ 。真。

$q \Rightarrow p$: 実数の2乗は必ず0以上 ($x^2 \geq 0, y^2 \geq 0$)。和が0になるのは、2つとも0のときしかない。つまり $x = 0$ かつ $y = 0$ 。真。

両方の矢印が真なので同値。

必要十分条件

応3

集合を使った判定+反例

1 以上 20 以下の自然数全体を全体集合 U とする。 A : 4の倍数の集合、 B : 8の倍数の集合とすると、命題「 $x \in A$ ならば $x \in B$ 」の真偽を答え、偽ならば反例となる x の値のうち最小のものを求めよ。

真偽 偽 反例 (最小) $x =$ 4

$A = \{4, 8, 12, 16, 20\}$ 、 $B = \{8, 16\}$ 。 A の要素のうち B に入っていないものがある (4, 12, 20) ので、 $A \subset B$ は成り立たない。反例のうち最小のものは $x = 4$ 。

偽 (反例 : $x = 4$)

応4

絶対値の定義と必要十分

実数 x について、 $p : |x| = 3$ 、 $q : x = 3$ または $x = -3$ とする。 p は q であるための何条件か。

答え 必要十分

絶対値の定義そのものにより、「 $|x| = 3$ 」と「 $x = 3$ または $x = -3$ 」はまったく同じ実数の集まりを表す。したがって $p \Rightarrow q$ 、 $q \Rightarrow p$ はどちらも真。

必要十分条件

命題「 $x < 1$ または $x > 5$ 」の否定を作り、 $a \leq x \leq b$ の形で表すときの a, b の値を求めよ。

$$a = \underline{1} \quad b = \underline{5}$$

「 p または q 」の否定は「 p でない、かつ q でない」。 p : 「 $x < 1$ 」の否定は「 $x \geq 1$ 」、 q : 「 $x > 5$ 」の否定は「 $x \leq 5$ 」。これを「かつ」でつなぐと $x \geq 1$ かつ $x \leq 5$ 、すなわち $1 \leq x \leq 5$ 。

$$a = 1, b = 5$$