

2次関数の決定

解答（全21問）

氏名 _____

得点 _____ / 21点

DRILL

練習問題（全16問）

基本（1～6）

1

頂点形：頂点と1点

頂点が $(2, -1)$ で、点 $(4, 7)$ を通る放物線を $y = a(x - 2)^2 - 1$ の形で求める。 a の値を求めよ。

$a =$ 2

頂点が $(2, -1)$ なので $y = a(x - 2)^2 - 1$ とおける。

点 $(4, 7)$ を代入： $7 = a(4 - 2)^2 - 1 = 4a - 1$

$4a = 8 \quad a = 2$

$a = 2$ (式は $y = 2(x - 2)^2 - 1$)

2

頂点形：頂点と1点

頂点が $(-1, 3)$ で、点 $(1, -5)$ を通る放物線を $y = a(x + 1)^2 + 3$ の形で求める。 a の値を求めよ。

$$a = \underline{-2}$$

頂点が $(-1, 3)$ なので $y = a(x + 1)^2 + 3$ とおける。

点 $(1, -5)$ を代入： $-5 = a(1 + 1)^2 + 3 = 4a + 3$

$$4a = -8 \quad a = -2$$

$$a = -2 \text{ (式は } y = -2(x + 1)^2 + 3 \text{)}$$

3

頂点形：頂点と1点

頂点が $(3, 0)$ で、点 $(5, 8)$ を通る放物線を $y = a(x - 3)^2$ の形で求める。 a の値を求めよ。

$$a = \underline{2}$$

頂点が $(3, 0)$ なので $y = a(x - 3)^2$ とおける。

点 $(5, 8)$ を代入： $8 = a(5 - 3)^2 = 4a$

$$a = 2$$

$$a = 2 \text{ (式は } y = 2(x - 3)^2 \text{)}$$

4

頂点形：頂点と1点 (a,p,qを求める)

頂点が $(2, 5)$ で、点 $(0, 1)$ を通る放物線を $y = a(x - p)^2 + q$ の形で表すとき、 a, p, q の値を求めよ。

$$a = \underline{-1} \quad p = \underline{2} \quad q = \underline{5}$$

頂点が $(2, 5)$ なので $p = 2, q = 5$ 、 $y = a(x - 2)^2 + 5$ とおける。

点 $(0, 1)$ を代入： $1 = a(0 - 2)^2 + 5 = 4a + 5$

$$4a = -4 \quad a = -1$$

$$a = -1, p = 2, q = 5$$

5

頂点形：頂点と1点 (a,p,qを求める)

頂点が $(-2, -3)$ で、点 $(1, 6)$ を通る放物線を $y = a(x - p)^2 + q$ の形で表すとき、 a, p, q の値を求めよ。

$$a = \underline{1} \quad p = \underline{-2} \quad q = \underline{-3}$$

頂点が $(-2, -3)$ なので $p = -2, q = -3$ 、 $y = a(x + 2)^2 - 3$ とおける。

点 $(1, 6)$ を代入： $6 = a(1 + 2)^2 - 3 = 9a - 3$

$$9a = 9 \quad a = 1$$

$$a = 1, p = -2, q = -3$$

頂点が $(1, -4)$ で、点 $(3, 4)$ を通る放物線を $y = a(x - p)^2 + q$ の形で表すとき、 a, p, q の値を求めよ。

$$a = \underline{2} \quad p = \underline{1} \quad q = \underline{-4}$$

頂点が $(1, -4)$ なので $p = 1, q = -4, y = a(x - 1)^2 - 4$ とおける。

点 $(3, 4)$ を代入： $4 = a(3 - 1)^2 - 4 = 4a - 4$

$$4a = 8 \quad a = 2$$

$$a = 2, p = 1, q = -4$$

標準 (7~12) ※形は自分で判断する

7 放物線が3点 $(0, 1), (1, 4), (2, 11)$ を通るとき、 $y = ax^2 + bx + c$ の a, b, c の値を求めよ。

$$a = \underline{2} \quad b = \underline{1} \quad c = \underline{1}$$

一般形 $y = ax^2 + bx + c$ とおく。

$$(0, 1) : c = 1 \quad \cdots(1)$$

$$(1, 4) : a + b + c = 4 \quad \cdots(2)$$

$$(2, 11) : 4a + 2b + c = 11 \quad \cdots(3)$$

(1)を(2),(3)に代入：

$$(2) : a + b = 3 \quad \cdots(2)'$$

$$(3) : 4a + 2b = 10 \text{ より } 2a + b = 5 \quad \cdots(3)'$$

$$(3)' - (2)' : a = 2$$

$$(2)' \text{に代入} : b = 1$$

すでに $c = 1$ 。

$$a = 2, b = 1, c = 1 \text{ (式は } y = 2x^2 + x + 1)$$

- 8 放物線が3点 $(0, -3)$, $(1, -2)$, $(2, 3)$ を通るとき、 $y = ax^2 + bx + c$ の a, b, c の値を求めよ。

$$a = \underline{2} \quad b = \underline{-1} \quad c = \underline{-3}$$

一般形 $y = ax^2 + bx + c$ とおく。

$$(0, -3) : c = -3 \quad \cdots(1)$$

$$(1, -2) : a + b + c = -2 \quad \cdots(2)$$

$$(2, 3) : 4a + 2b + c = 3 \quad \cdots(3)$$

(1)を(2),(3)に代入：

$$(2) : a + b = 1 \quad \cdots(2)'$$

$$(3) : 4a + 2b = 6 \text{ より } 2a + b = 3 \quad \cdots(3)'$$

$$(3)' - (2)' : a = 2$$

$$(2)' \text{に代入} : b = -1$$

すでに $c = -3$ 。

$$a = 2, b = -1, c = -3 \text{ (式は } y = 2x^2 - x - 3)$$

- 9 軸が $x = 1$ で、点 $(0, 5)$ と点 $(3, -4)$ を通る放物線を $y = a(x - 1)^2 + q$ の形で表すとき、 a, q の値を求めよ。

$$a = \underline{-3} \quad q = \underline{8}$$

軸 $x = 1$ より $y = a(x - 1)^2 + q$ とおける。

$$\text{点 } (0, 5) : 5 = a(0 - 1)^2 + q = a + q \quad \cdots(1)$$

$$\text{点 } (3, -4) : -4 = a(3 - 1)^2 + q = 4a + q \quad \cdots(2)$$

$$(2) - (1) : (-4) - 5 = (4a + q) - (a + q) \text{ より } -9 = 3a \quad a = -3$$

$$(1) \text{に代入} : 5 = -3 + q \quad q = 8$$

$$a = -3, q = 8 \text{ (式は } y = -3(x - 1)^2 + 8)$$

- 10 軸が $x = 2$ で、点 $(0, -3)$ と点 $(5, -18)$ を通る放物線を $y = a(x - 2)^2 + q$ の形で表すとき、 a, q の値を求めよ。

$$a = \underline{-3} \quad q = \underline{9}$$

軸 $x = 2$ より $y = a(x - 2)^2 + q$ とおける。

$$\text{点 } (0, -3) : -3 = a(0 - 2)^2 + q = 4a + q \quad \cdots(1)$$

$$\text{点 } (5, -18) : -18 = a(5 - 2)^2 + q = 9a + q \quad \cdots(2)$$

$$(2) - (1) : (-18) - (-3) = (9a + q) - (4a + q) \quad \text{より } -15 = 5a \quad a = -3$$

$$(1) \text{ に代入 : } -3 = 4(-3) + q = -12 + q \quad q = 9$$

$$a = -3, q = 9 \text{ (式は } y = -3(x - 2)^2 + 9 \text{)}$$

- 11 放物線が x 軸と点 $(2, 0), (5, 0)$ で交わり、点 $(0, 10)$ を通るとき、これを展開して $y = ax^2 + bx + c$ の形にしたときの a, b, c の値を求めよ。

$$a = \underline{1} \quad b = \underline{-7} \quad c = \underline{10}$$

x 軸との交点が $(2, 0), (5, 0)$ なので $y = a(x - 2)(x - 5)$ とおける。

$$\text{点 } (0, 10) \text{ を代入 : } 10 = a(0 - 2)(0 - 5) = a \times (-2) \times (-5) = 10a$$

$$a = 1$$

$$\text{展開すると } y = (x - 2)(x - 5) = x^2 - 7x + 10$$

$$a = 1, b = -7, c = 10$$

- 12 放物線が x 軸と点 $(-1, 0)$, $(4, 0)$ で交わり、点 $(0, -8)$ を通るとき、これを展開して $y = ax^2 + bx + c$ の形にしたときの a, b, c の値を求めよ。

$$a = \underline{2} \quad b = \underline{-6} \quad c = \underline{-8}$$

x 軸との交点が $(-1, 0)$, $(4, 0)$ なので $y = a(x + 1)(x - 4)$ とおける。

点 $(0, -8)$ を代入： $-8 = a(0 + 1)(0 - 4) = a \times 1 \times (-4) = -4a$

$$a = 2$$

展開すると $y = 2(x + 1)(x - 4) = 2(x^2 - 3x - 4) = 2x^2 - 6x - 8$

$$a = 2, b = -6, c = -8$$

挑戦 (13~16)

- 13 最大値・最小値の条件から決定

放物線が $x = 2$ で最大値 5 をとり、 $x = 0$ のとき $y = 1$ であるという。この放物線を $y = a(x - p)^2 + q$ の形で表すとき、 a, p, q の値を求めよ。

$$a = \underline{-1} \quad p = \underline{2} \quad q = \underline{5}$$

「 $x = 2$ で最大値 5」とは、頂点が $(2, 5)$ で上に凸ということ。よって $p = 2$, $q = 5$ 、 $y = a(x - 2)^2 + 5$ とおける。

$x = 0$ で $y = 1$ なので、点 $(0, 1)$ を代入： $1 = a(0 - 2)^2 + 5 = 4a + 5$

$$4a = -4 \quad a = -1$$

$a = -1 < 0$ となり「上に凸で最大値をとる」という条件ともつじつまが合う。

$$a = -1, p = 2, q = 5 \text{ (式は } y = -(x - 2)^2 + 5 \text{)}$$

$y = x^2$ のグラフを x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動した放物線が、点 $(1, 4)$ と点 $(3, 0)$ を通るという。 p, q の値を求めよ。

$$p = \underline{3} \quad q = \underline{0}$$

$y = x^2$ を x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動すると $y = (x - p)^2 + q$ になる
(頂点 $(0, 0)$ が (p, q) に移るだけで、開き方 $a = 1$ は変わらない)。

点 $(1, 4)$ を代入： $4 = (1 - p)^2 + q \quad \cdots(1)$

点 $(3, 0)$ を代入： $0 = (3 - p)^2 + q \quad \cdots(2)$

$$(1) - (2) : 4 - 0 = (1 - p)^2 - (3 - p)^2$$

$$\text{右辺を因数分解：} (1 - p)^2 - (3 - p)^2 = \{(1 - p) - (3 - p)\}\{(1 - p) + (3 - p)\} = (-2)(4 - 2p) = -8 + 4p$$

$$\text{よって } 4 = -8 + 4p \quad 4p = 12 \quad p = 3$$

$$(2) \text{に代入：} 0 = (3 - 3)^2 + q = q \quad \text{より } q = 0$$

$$p = 3, q = 0 \quad (\text{式は } y = (x - 3)^2)$$

放物線 $y = a(x - 2)^2 - 8$ ($a > 0$) が x 軸から切り取る線分の長さが 8 であるとき、 a の値を求めよ。

$$a = \underline{\underline{1/2}}$$

x 軸との交点は $y = 0$ とおいて求める。

$$a(x - 2)^2 - 8 = 0$$

$$(x - 2)^2 = \frac{8}{a}$$

$$x - 2 = \pm \sqrt{\frac{8}{a}} \quad \text{より} \quad x = 2 \pm \sqrt{\frac{8}{a}}$$

2つの交点の間の長さ（線分の長さ）は $2\sqrt{\frac{8}{a}}$ 。

$$\text{条件より } 2\sqrt{\frac{8}{a}} = 8$$

$$\sqrt{\frac{8}{a}} = 4$$

$$\frac{8}{a} = 16$$

$$a = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

（確認： $a = \frac{1}{2}$ のとき交点は $x = 2 \pm 4$ 、つまり $x = -2, 6$ で、長さはたしかに 8 である。）

$$a = \frac{1}{2}$$

放物線 $y = a(x - 4)^2 - 9$ ($a > 0$) が x 軸から切り取る線分の長さが 2 であるとき、 a の値を求めよ。

$$a = \underline{9}$$

x 軸との交点は $y = 0$ とおいて求める。

$$a(x - 4)^2 - 9 = 0$$

$$(x - 4)^2 = \frac{9}{a}$$

$$x - 4 = \pm \sqrt{\frac{9}{a}} \quad \text{より} \quad x = 4 \pm \sqrt{\frac{9}{a}}$$

線分の長さは $2\sqrt{\frac{9}{a}}$ 。

$$\text{条件より } 2\sqrt{\frac{9}{a}} = 2$$

$$\sqrt{\frac{9}{a}} = 1$$

$$\frac{9}{a} = 1$$

$$a = 9$$

(確認： $a = 9$ のとき交点は $x = 4 \pm 1$ 、つまり $x = 3, 5$ で、長さはたしかに 2。)

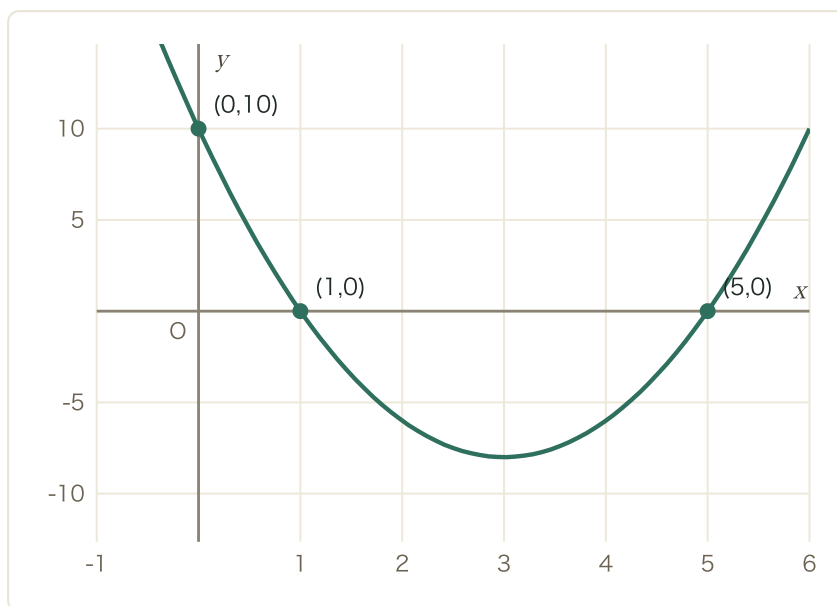
$$a = 9$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。入試の基礎レベルに挑戦しよう。

放物線 $y = a(x - 3)^2 + q$ ($a > 0$) が点 $(0, 10)$ を通り、 x 軸から切り取る線分の長さが4であるとき、 a, q の値を求めよ。



x 軸から切り取る線分の長さは $5 - 1 = 4$ 。

$$a = \underline{2} \quad q = \underline{-8}$$

$a > 0$ で x 軸と2点で交わるためには、頂点は x 軸より下 ($q < 0$) でなければならない。

$$y = 0 \text{ とおくと } a(x - 3)^2 + q = 0 \text{ より } (x - 3)^2 = -\frac{q}{a}$$

$$\text{よって } x = 3 \pm \sqrt{-\frac{q}{a}}, \text{ 線分の長さは } 2\sqrt{-\frac{q}{a}}.$$

$$\text{条件より } 2\sqrt{-\frac{q}{a}} = 4 \rightarrow \sqrt{-\frac{q}{a}} = 2 \rightarrow -\frac{q}{a} = 4 \rightarrow q = -4a \quad \cdots(1)$$

$$\text{点 } (0, 10) \text{ を代入: } 10 = a(0 - 3)^2 + q = 9a + q \quad \cdots(2)$$

$$(1) \text{ を } (2) \text{ に代入: } 10 = 9a - 4a = 5a \text{ より } a = 2$$

$$(1) \text{ に代入: } q = -4 \times 2 = -8$$

(確認: $q = -8 < 0$ で条件と整合。頂点 $(3, -8)$ 、交点は $x = 3 \pm 2$ すなわち $x = 1, 5$ で長さはたしかに 4。)

$$a = 2, q = -8$$

2次関数 $y = x^2 - 2ax + a^2 - 2a - 3$ の最小値の絶対値が 7 であるとき、定数 a の値をすべて求めよ（コンマ区切りで入力、順不同）。

$$a = \underline{-5, 2}$$

平方完成する。

$$y = x^2 - 2ax + a^2 - 2a - 3 = (x - a)^2 - a^2 + a^2 - 2a - 3 = (x - a)^2 - 2a - 3$$

x^2 の係数が $1 > 0$ なので下に凸。よって最小値は $x = a$ のときの値 $-2a - 3$ 。

「最小値の絶対値が7」とは $|-2a - 3| = 7$ ということ。絶対値の中身の符号で場合分けする。

(i) $-2a - 3 = 7$ のとき： $-2a = 10$ より $a = -5$

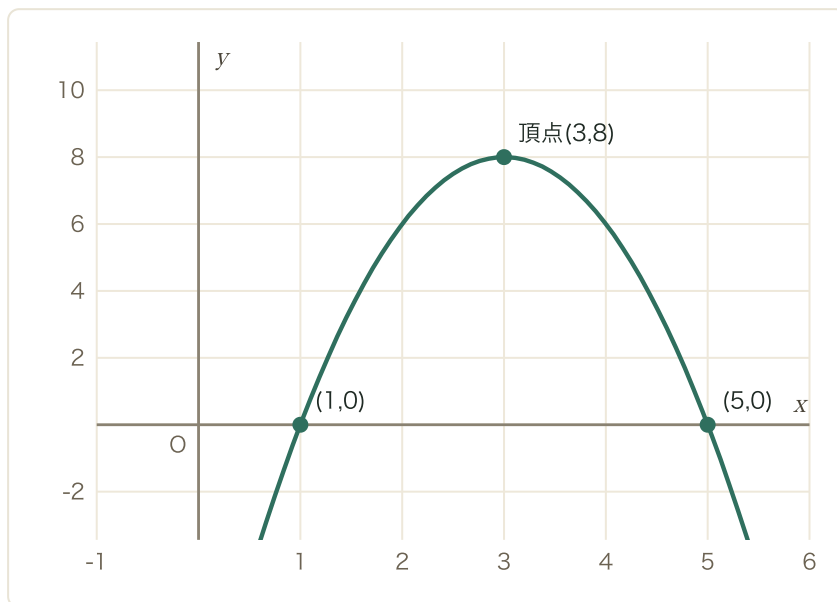
(ii) $-2a - 3 = -7$ のとき： $-2a = -4$ より $a = 2$

（確認： $a = -5$ のとき $y = x^2 + 10x + 32 = (x + 5)^2 + 7$ 、最小値7で $|7| = 7$ 。

$a = 2$ のとき $y = x^2 - 4x - 3 = (x - 2)^2 - 7$ 、最小値 -7 で $|-7| = 7$ 。どちらも条件を満たす。）

$$a = -5, 2$$

放物線 $y = ax^2$ ($a \neq 0$) を x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動すると、 x 軸と2点 $(1, 0)$ 、 $(5, 0)$ で交わり、最大値 8 をとる放物線になるという。 a, p, q の値を求めよ。



$$a = \underline{-2} \quad p = \underline{3} \quad q = \underline{8}$$

$y = ax^2$ を x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動すると $y = a(x - p)^2 + q$ になる（開き方 a は変わらない）。

「最大値をとる」ということは上に凸 ($a < 0$) で、最大値は頂点の y 座標に等しいから $q = 8$ 。

放物線は軸 $x = p$ について左右対称だから、2交点 $(1, 0)$ 、 $(5, 0)$ の中点が頂点の x 座標になる。

$$p = \frac{1 + 5}{2} = 3$$

$$\text{交点 } (1, 0) \text{ を代入: } 0 = a(1 - 3)^2 + 8 = 4a + 8 \quad \text{より} \quad a = -2$$

(確認: $a = -2 < 0$ で「最大値をとる」条件と整合。もう一方の交点も確認:
 $a(5 - 3)^2 + 8 = -2 \times 4 + 8 = 0$ ✓)

$$a = -2, p = 3, q = 8$$

放物線 $y = a(x - p)^2 - 2a - 3$ ($a > 0$) が点 $(6, 4)$ を通り、 x 軸から切り取る線分の長さが $2\sqrt{5}$ であるとき、 a, p の値を求めよ (p は考えられる値をすべて答えよ。コンマ区切り、順不同)。

$$a = \underline{1} \quad p = \underline{3, 9}$$

まず線分の長さの条件だけで a が決まることに注目する。頂点の位置 p をどこにずらしても、頂点から左右に x 軸までの距離は変わらないので、線分の長さは a だけで決まり p にはよらない。

$$y = 0 \text{ とおくと } a(x - p)^2 - 2a - 3 = 0 \text{ より } (x - p)^2 = \frac{2a + 3}{a} = 2 + \frac{3}{a}$$

線分の長さは $2\sqrt{2 + \frac{3}{a}}$ 。

$$\text{条件より } 2\sqrt{2 + \frac{3}{a}} = 2\sqrt{5} \rightarrow \sqrt{2 + \frac{3}{a}} = \sqrt{5} \rightarrow 2 + \frac{3}{a} = 5 \rightarrow \frac{3}{a} = 3$$

$$\rightarrow a = 1$$

$a = 1$ を代入すると $y = (x - p)^2 - 5$ 。点 $(6, 4)$ を代入：

$$4 = (6 - p)^2 - 5 \text{ より } (6 - p)^2 = 9 \text{ よって } 6 - p = \pm 3$$

$6 - p = 3$ のとき $p = 3$ 、 $6 - p = -3$ のとき $p = 9$ 。頂点をどちらの位置に置いても点 $(6, 4)$ を通り得るので、両方とも正しい答え。

(確認： $p = 3$ ： $y = (x - 3)^2 - 5$ 、 $x = 6$ で $(6 - 3)^2 - 5 = 9 - 5 = 4$ ✓。 $p = 9$ ： $y = (x - 9)^2 - 5$ 、 $x = 6$ で $(6 - 9)^2 - 5 = 9 - 5 = 4$ ✓)

$$a = 1, p = 3 \text{ または } 9$$

放物線 $y = x^2 + (2a - 4)x + a^2 - 2$ が x 軸に接するとき、定数 a の値を求めよ。また、そのときの接点の x 座標を求めよ。

$a = \underline{\underline{3/2}}$ 接点の x 座標 $= \underline{\underline{1/2}}$

x 軸に接する (ちょうど1点だけで交わる) とは、方程式 $x^2 + (2a - 4)x + a^2 - 2 = 0$ が重解をもつということ。よって判別式 $D = 0$ 。

$$\begin{aligned} D &= (2a - 4)^2 - 4 \times 1 \times (a^2 - 2) \\ &= (4a^2 - 16a + 16) - (4a^2 - 8) \\ &= 4a^2 - 16a + 16 - 4a^2 + 8 \\ &= -16a + 24 \end{aligned}$$

$$D = 0 \text{ より } -16a + 24 = 0 \quad \text{よって } a = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$$

このとき接点の x 座標は、重解の公式 $x = -\frac{2a - 4}{2} = 2 - a$ より

$$x = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

(確認: $a = \frac{3}{2}$ のとき $2a - 4 = -1$ 、 $a^2 - 2 = \frac{1}{4}$ なので $y = x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ 。たしかに $x = \frac{1}{2}$ で重解=接点。)

$a = \frac{3}{2}$, 接点の x 座標 $= \frac{1}{2}$