

2次不等式

解答（全23問）

氏名 _____

得点 _____ / 23点

DRILL

練習問題（全18問）

基本（1～7）

1

外側型

$x^2 - 5x + 6 > 0$ を解け。解は $x < \text{ア}$ または $\text{イ} < x$ の形になる。

ア = 2 イ = 3

積が6・和が-5になる2数は -2 と -3 なので $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ 。
交点は $x = 2, 3$ 。 $y > 0$ （グラフが上）なので外側型。

$x < 2$ または $3 < x$

2

内側型

$x^2 - 5x + 6 < 0$ を解け。解は $\text{ウ} < x < \text{エ}$ の形になる。

$$\text{ウ} = \underline{2} \quad \text{エ} = \underline{3}$$

因数分解は問1と同じで $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ 、交点は $x = 2, 3$ 。
今度は $y < 0$ (グラフが下) なので内側型。

$$2 < x < 3$$

3

外側型

$x^2 + x - 12 > 0$ を解け。解は $x < \text{ア}$ または $\text{イ} < x$ の形になる。

$$\text{ア} = \underline{-4} \quad \text{イ} = \underline{3}$$

積が-12・和が1になる2数は4と-3なので $x^2 + x - 12 = (x + 4)(x - 3)$ 。
交点は $x = -4, 3$ 。 $y > 0$ なので外側型。

$$x < -4 \text{ または } 3 < x$$

4

内側型

$x^2 + x - 12 < 0$ を解け。解は $\text{ウ} < x < \text{エ}$ の形になる。

$$\text{ウ} = \underline{-4} \quad \text{エ} = \underline{3}$$

因数分解は問3と同じで $x^2 + x - 12 = (x + 4)(x - 3)$ 、交点は $x = -4, 3$ 。
 $y < 0$ なので内側型。

$$-4 < x < 3$$

5

外側型・等号つき

$x^2 - 9 \geq 0$ を解け。解は $x \leq \text{ア}$ または $\text{イ} \leq x$ の形になる。

$$\text{ア} = \underline{-3} \quad \text{イ} = \underline{3}$$

$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ 。交点は $x = -3, 3$ 。 $y \geq 0$ (等号つき) なので境界を含む外側型。

$$x \leq -3 \text{ または } 3 \leq x$$

6

内側型・等号つき

$x^2 - 9 \leq 0$ を解け。解は $\text{ウ} \leq x \leq \text{エ}$ の形になる。

$$\text{ウ} = \underline{-3} \quad \text{エ} = \underline{3}$$

因数分解は問5と同じで $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ 、交点は $x = -3, 3$ 。
 $y \leq 0$ (等号つき) なので境界を含む内側型。

$$-3 \leq x \leq 3$$

7

外側型

$x^2 - 2x - 8 > 0$ を解け。解は $x < \text{ア}$ または $\text{イ} < x$ の形になる。

$$\text{ア} = \underline{-2} \quad \text{イ} = \underline{4}$$

積が-8・和が-2になる2数は -4 と 2 なので $x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$ 。
交点は $x = -2, 4$ 。 $y > 0$ なので外側型。

$$x < -2 \text{ または } 4 < x$$

8

係数が1でない・外側型

$2x^2 - 3x - 2 > 0$ を解け。解は $x < \text{ア}$ または $\text{イ} < x$ の形になる (アは分数でよい)。

$$\text{ア} = \underline{-1/2} \quad \text{イ} = \underline{2}$$

$2x^2 - 3x - 2 = (2x + 1)(x - 2)$ (展開すると $2x^2 - 4x + x - 2 = 2x^2 - 3x - 2$ で一致を確認できる)。

$2x + 1 = 0$ より $x = -\frac{1}{2}$ 、 $x - 2 = 0$ より $x = 2$ 。交点は $x = -\frac{1}{2}, 2$ 。

$a = 2 > 0$ 、 $y > 0$ なので外側型。

$$x < -\frac{1}{2} \text{ または } 2 < x$$

9

係数が1でない・内側型

$2x^2 + x - 3 < 0$ を解け。解は $\text{ウ} < x < \text{エ}$ の形になる (ウは分数でよい)。

$$\text{ウ} = \underline{-3/2} \quad \text{エ} = \underline{1}$$

$2x^2 + x - 3 = (2x + 3)(x - 1)$ (展開すると $2x^2 - 2x + 3x - 3 = 2x^2 + x - 3$ で一致を確認できる)。

$2x + 3 = 0$ より $x = -\frac{3}{2}$ 、 $x - 1 = 0$ より $x = 1$ 。交点は $x = -\frac{3}{2}, 1$ 。

$a = 2 > 0$ 、 $y < 0$ なので内側型。

$$-\frac{3}{2} < x < 1$$

10

 x^2 の係数が負・内側型

$-x^2 + 3x + 4 > 0$ を解け。解は $\text{ウ} < x < \text{エ}$ の形になる。

$$\text{ウ} = \underline{-1} \quad \text{エ} = \underline{4}$$

両辺に -1 を掛けて（不等号が反転） $x^2 - 3x - 4 < 0$ 。

$x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1)$ 。交点は $x = -1, 4$ 。

$y < 0$ （反転後）なので内側型。

$$-1 < x < 4$$

11

 x^2 の係数が負・外側型

$-x^2 + x + 6 < 0$ を解け。解は $x < \text{ア}$ または $\text{イ} < x$ の形になる。

$$\text{ア} = \underline{-2} \quad \text{イ} = \underline{3}$$

両辺に -1 を掛けて（不等号が反転） $x^2 - x - 6 > 0$ 。

$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$ 。交点は $x = -2, 3$ 。

$y > 0$ （反転後）なので外側型。

$$x < -2 \text{ または } 3 < x$$

12

D=0型

$x^2 - 6x + 9 > 0$ を解け。解は「 $x = \text{カ}$ を除くすべての実数」の形になる。

$$\text{カ} = \underline{3}$$

$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$ 。2乗の形は常に0以上で、0になるのは $x = 3$ のときだけ。

よって $x = 3$ 以外はすべて正になる。

$$x = 3 \text{ を除くすべての実数}$$

13

D<0型・解なし

$x^2 + 4x + 5 < 0$ を解け。解がない場合は「解なし」と入力せよ。

解= なし

平方完成すると $x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1$ 。

$(x + 2)^2 \geq 0$ より $(x + 2)^2 + 1 \geq 1 > 0$ がどんな x でも成り立つ。よって0未満になることはない。

解なし

14

係数が1でない・外側型

$4x^2 - 4x - 3 > 0$ を解け。解は $x < \text{ア}$ または $\text{イ} < x$ の形になる（ア・イは分数でよい）。

ア= -1/2 イ= 3/2

$4x^2 - 4x - 3 = (2x - 3)(2x + 1)$ （展開すると $4x^2 + 2x - 6x - 3 = 4x^2 - 4x - 3$ で一致を確認できる）。

$2x - 3 = 0$ より $x = \frac{3}{2}$ 、 $2x + 1 = 0$ より $x = -\frac{1}{2}$ 。交点は $x = -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ 。

$a = 4 > 0$ 、 $y > 0$ なので外側型。

$x < -\frac{1}{2}$ または $\frac{3}{2} < x$

挑戦 (15~18)

15

すべての実数 x で成り立つ条件

すべての実数 x について $x^2 + kx + k + 3 > 0$ が成り立つように、定数 k の範囲を求めよ。解は $\text{ク} < k < \text{ケ}$ の形になる（不等式の等号の有無は details で確認）。

$$\text{ク} = \underline{-2} \quad \text{ケ} = \underline{6}$$

左辺を $y = x^2 + kx + (k + 3)$ とみると $a = 1 > 0$ （下に凸）。

下に凸の放物線がすべての x で $y > 0$ になるのは、グラフが x 軸と交わらない、つまり判別式 $D < 0$ のとき（ $D = 0$ だと接する点で $y = 0$ になり「 > 0 」を満たさないので除く）。

$$D = k^2 - 4(k + 3) = k^2 - 4k - 12$$

$D < 0$ より $k^2 - 4k - 12 < 0$ 。積が -12 ・和が -4 になる2数は -6 と 2 なので $(k - 6)(k + 2) < 0$ 。

これは内側型なので $-2 < k < 6$ （等号は含まない）。

$$-2 < k < 6$$

16

連立不等式（共通範囲）

連立不等式 $x^2 - 2x - 8 < 0$ かつ $x^2 - 6x + 5 > 0$ を解け。共通範囲の端点を入力せよ（不等式の等号の有無は details で確認）。

$$\text{下端} = \underline{-2} \quad \text{上端} = \underline{1}$$

1つ目： $x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$ 。交点 $x = -2, 4$ 。 $y < 0$ なので内側型 → $-2 < x < 4$ 。

2つ目： $x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5)$ 。交点 $x = 1, 5$ 。 $y > 0$ なので外側型 → $x < 1$ または $5 < x$ 。

両方を同時に満たす範囲（共通部分）を数直線で確認する。 $-2 < x < 4$ のうち、 $x < 1$ の部分だけが2つ目の条件も満たす（ $x > 5$ の部分は $-2 < x < 4$ からはみ出るので使えない）。

$$-2 < x < 1$$

連立不等式 $x^2 - 2x - 3 < 0$ かつ $x^2 - 4x > 0$ を解け。共通範囲の端点を入力せよ（不等式の等号の有無は details で確認）。

下端 = -1 上端 = 0

1つ目： $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$ 。交点 $x = -1, 3$ 。 $y < 0$ なので内側型 → $-1 < x < 3$ 。

2つ目： $x^2 - 4x = x(x - 4)$ 。交点 $x = 0, 4$ 。 $y > 0$ なので外側型 → $x < 0$ または $4 < x$ 。

共通部分を数直線で確認する。 $-1 < x < 3$ のうち、 $x < 0$ の部分だけが2つ目の条件も満たす（ $x > 4$ の部分は $-1 < x < 3$ からはみ出るので使えない）。

$$-1 < x < 0$$

連立不等式 $x^2 - 5x + 4 \leq 0$ かつ $x^2 - 2x - 3 > 0$ を解け。共通範囲の端点を入力せよ（不等式の等号の有無は details で確認）。

下端 = 3 上端 = 4

1つ目： $x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$ 。交点 $x = 1, 4$ 。 $y \leq 0$ （等号つき）なので内側型 → $1 \leq x \leq 4$ 。

2つ目： $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$ 。交点 $x = -1, 3$ 。 $y > 0$ （等号なし）なので外側型 → $x < -1$ または $3 < x$ 。

共通部分を数直線で確認する。 $1 \leq x \leq 4$ のうち、 $3 < x$ の部分だけが2つ目の条件も満たす（ $x < -1$ の部分は $1 \leq x \leq 4$ からはみ出るので使えない）。 $x = 3$ 自体は2つ目の条件（ $x > 3$ ）を満たさないので除く。

$$3 < x \leq 4$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。入試の基礎レベルに挑戦しよう。

2次不等式 $x^2 - 2x - k < 0$ の整数解がちょうど3個であるように、定数 k の値の範囲を求めよ。範囲は $\text{ク} < k \leq \text{ケ}$ の形になる（等号の有無はdetailsで確認）。

ク = 0 ケ = 3

左辺を平方完成する。

$$x^2 - 2x - k < 0$$

$$\iff x^2 - 2x < k$$

$$\iff (x - 1)^2 - 1 < k$$

$$\iff (x - 1)^2 < k + 1$$

右辺が正でないとき解は存在しない（左辺は常に0以上）ので $k + 1 > 0$ 、すなわち $k > -1$ の場合のみ考える。このとき $r = \sqrt{k + 1}$ ($r > 0$) とおくと、解は

$$1 - r < x < 1 + r$$

という、 $x = 1$ を中心に左右対称な範囲になる。

この範囲に含まれる整数を数える。中心が $x = 1$ なので、まず $x = 1$ 自身は $r > 0$ なら必ず含まれる。

$x = 0$ が含まれる条件は $1 - r < 0$ 、つまり $r > 1$ 。同じ対称性から $x = 2$ が含まれる条件も $r > 1$ 。

$x = -1$ が含まれない条件は $1 - r \geq -1$ 、つまり $r \leq 2$ 。同じ対称性から $x = 3$ が含まれない条件も $r \leq 2$ 。

以上より、整数解が $x = 0, 1, 2$ のちょうど3個になるのは $1 < r \leq 2$ のとき ($r \leq 1$ だと $x = 0, 2$ が抜け1個以下になり、 $r > 2$ だと $x = -1, 3$ も入り5個以上になる)。

$$r^2 = k + 1 \text{ だから、} r > 1 \iff k + 1 > 1 \iff k > 0, \quad r \leq 2 \iff k + 1 \leq 4 \iff k \leq 3.$$

$$0 < k \leq 3$$

連立不等式 $2x^2 - x - 6 \leq 0$ かつ $x^2 - 3x - 4 > 0$ を解け。共通範囲の下端・上端を入力せよ（不等号の等号の有無はdetailsで確認）。

下端 = -3/2 上端 = -1

1つ目： $2x^2 - x - 6 = (2x + 3)(x - 2)$ （展開すると $2x^2 - 4x + 3x - 6 = 2x^2 - x - 6$ で一致を確認できる）。

$2x + 3 = 0$ より $x = -\frac{3}{2}$ 、 $x - 2 = 0$ より $x = 2$ 。交点は $x = -\frac{3}{2}, 2$ 。

$a = 2 > 0$ 、 $y \leq 0$ （等号つき）なので境界を含む内側型 $\rightarrow -\frac{3}{2} \leq x \leq 2$ 。

2つ目： $x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1)$ 。交点は $x = -1, 4$ 。 $y > 0$ （等号なし）なので外側型 $\rightarrow x < -1$ または $4 < x$ 。

共通部分を数直線で確認する。 $-\frac{3}{2} \leq x \leq 2$ のうち、 $x < -1$ の部分だけが2つ目の条件も満たす（ $x > 4$ の部分は $-\frac{3}{2} \leq x \leq 2$ からはみ出るので使えない）。 $x = -1$ 自体は2つ目の条件（ $x < -1$ ）を満たさないので除く。

$$-\frac{3}{2} \leq x < -1$$

$-1 \leq x \leq 2$ の範囲のすべての x について、不等式 $x^2 - 2ax + 3a \geq 0$ が成り立つように、定数 a の値の範囲を求めよ。範囲は $\text{サ} \leq a \leq \text{シ}$ の形になる。

サ = 0 シ = 4

$f(x) = x^2 - 2ax + 3a$ とおくと a （係数の意味の a ではなく頂点の x 座標）ではなく、平方完成すると

$$f(x) = (x - a)^2 - a^2 + 3a$$

より頂点は $x = a$ 、頂点での y 座標は $-a^2 + 3a = 3a - a^2$ 。下に凸の放物線なので、区間 $[-1, 2]$ での最小値がどこで出るかは、頂点 $x = a$ が区間の左・中・右のどこにあるかで場合分けする。

【頂点が区間より左 ($a < -1$)】区間内では f は単調増加なので最小は $x = -1$ 。

$$f(-1) = 1 + 2a + 3a = 1 + 5a。1 + 5a \geq 0 \iff a \geq -\frac{1}{5}。$$

しかしこの場合分けの前提は $a < -1$ なので、 $a \geq -\frac{1}{5}$ と両立せず、この場合に該当する a はない。

【頂点が区間内 ($-1 \leq a \leq 2$)】最小は頂点の値 $f(a) = 3a - a^2$ 。

$$3a - a^2 \geq 0 \iff a(3 - a) \geq 0 \iff 0 \leq a \leq 3。$$

前提 $-1 \leq a \leq 2$ と共通部分をとると $0 \leq a \leq 2$ 。

【頂点が区間より右 ($a > 2$)】区間内では f は単調減少なので最小は $x = 2$ 。

$$f(2) = 4 - 4a + 3a = 4 - a。4 - a \geq 0 \iff a \leq 4。$$

前提 $a > 2$ と共通部分をとると $2 < a \leq 4$ 。

3つの場合を合わせると、 a の範囲は $\emptyset \cup [0, 2] \cup (2, 4] = [0, 4]$ 。

$$0 \leq a \leq 4$$

2次方程式 $x^2 - 2kx + k + 6 = 0$ が異なる2つの正の解をもつように、定数 k の値の範囲を求めよ。範囲は $k > \text{コ}$ の形になる。

コ = 3

$y = x^2 - 2kx + k + 6$ のグラフ（下に凸）が、 x 軸の**正の部分**で異なる2点と交わる条件を考える。次の3条件がすべて必要。

手順1 異なる2つの実数解をもつ ($D > 0$)

$$\frac{D}{4} = k^2 - (k + 6) = k^2 - k - 6$$

$$k^2 - k - 6 > 0 \iff (k - 3)(k + 2) > 0 \iff k < -2 \text{ または } k > 3$$

手順2 頂点の x 座標（軸）が正（2つの解の真ん中が正の位置になれば、両方正にはならない）

頂点の x 座標は平方完成 $x^2 - 2kx + k + 6 = (x - k)^2 - k^2 + k + 6$ より $x = k$ 。
よって $k > 0$

手順3 $x = 0$ での値が正（グラフが x 軸の負の側で交わっていないことの確認）

$$f(0) = k + 6 > 0 \iff k > -6$$

3つの条件をすべて満たす k を求める。手順2の $k > 0$ はすでに手順3の $k > -6$ を含んでいるので、手順1と手順2の共通部分を考えればよい。

$k > 0$ と ($k < -2$ または $k > 3$) の共通部分は $k > 3$ 。

$$k > 3$$

ある商品は現在1個100円で、1日300個売れている。この商品を1円値上げすると、1日の販売個数は2個ずつ減ると分かっている。値上げ額を x 円 ($0 \leq x \leq 50$) とするとき、1日の売上金額を30800円以上にするには、値上げ額を何円以上何円以下にすればよいか。

値上げ額は 10 円以上 40 円以下

値上げ後の価格は $100 + x$ 円、販売個数は $300 - 2x$ 個だから、売上金額 $R(x)$ は

$$\begin{aligned} R(x) &= (100 + x)(300 - 2x) \\ &= 30000 - 200x + 300x - 2x^2 \\ &= -2x^2 + 100x + 30000 \end{aligned}$$

条件は $R(x) \geq 30800$ なので

$$-2x^2 + 100x + 30000 \geq 30800$$

$$-2x^2 + 100x - 800 \geq 0$$

両辺を -2 で割ると（不等号が反転）

$$x^2 - 50x + 400 \leq 0$$

左辺を因数分解する。積が400・和が-50になる2数は -10 と -40 なので

$$x^2 - 50x + 400 = (x - 10)(x - 40)$$

交点は $x = 10, 40$ 。 $y \leq 0$ （等号つき）なので境界を含む内側型。

$$10 \leq x \leq 40 \quad (\text{値上げ額は10円以上40円以下})$$