

2次方程式

解答（全25問）

氏名 _____

得点 _____ / 25点

DRILL

練習問題（全20問）

基本（1～8） 因数分解で解く

1 $x^2 - 3x - 4 = 0$ を解け。

$x =$ 4,-1

かけて -4 、足して -3 になる2数は -4 と 1 。

$$(x - 4)(x + 1) = 0$$

$$x = 4, -1$$

2 $x^2 - 7x + 10 = 0$ を解け。

$x =$ 2,5

かけて 10 、足して -7 になる2数は -2 と -5 。

$$(x - 2)(x - 5) = 0$$

$$x = 2, 5$$

3 $x^2 + 2x - 15 = 0$ を解け。

$$x = \underline{-5, 3}$$

かけて -15 、足して 2 になる2数は 5 と -3 。

$$(x + 5)(x - 3) = 0$$

$$x = -5, 3$$

4 差の平方の形

$x^2 - 9 = 0$ を解け。

$$x = \underline{3, -3}$$

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 \text{ は2乗の差の形なので } (x - 3)(x + 3) = 0$$

$$x = 3, -3$$

5 重解（答えは1つだけ入力）

$x^2 - 8x + 16 = 0$ を解け。

$$x = \underline{4}$$

かけて 16 、足して -8 になる2数は -4 と -4 。

$$(x - 4)^2 = 0 \quad \text{両方の因数が同じなので、解は1つだけ（重解）。}$$

$$x = 4 \text{（重解）}$$

6 $x^2 + x - 6 = 0$ を解け。

$$x = \underline{-3, 2}$$

かけて -6 、足して 1 になる2数は 3 と -2 。

$$(x + 3)(x - 2) = 0$$

$$x = -3, 2$$

7 aが1でない（まず両辺を割る）

$2x^2 - 14x + 24 = 0$ を解け。

$$x = \underline{3, 4}$$

係数がすべて2の倍数なので、両辺を2で割ると $x^2 - 7x + 12 = 0$

かけて 12 、足して -7 になる2数は -3 と -4 。

$$(x - 3)(x - 4) = 0$$

$$x = 3, 4$$

8 aが1でない（まず両辺を割る）

$3x^2 + 9x - 12 = 0$ を解け。

$$x = \underline{-4, 1}$$

係数がすべて3の倍数なので、両辺を3で割ると $x^2 + 3x - 4 = 0$

かけて -4 、足して 3 になる2数は 4 と -1 。

$$(x + 4)(x - 1) = 0$$

$$x = -4, 1$$

標準（9～15） 解の公式とDの値

D ・実数解の個数・解 x の3つを入力しよう。実数解がないときは x の欄に「なし」と入力。

9 $x^2 - 2x - 8 = 0$ について、 D ・実数解の個数・解を求めよ。

$$D = \underline{36} \quad \text{個数 } \underline{2} \text{ 個} \quad x = \underline{4, -2}$$

$$a = 1, b = -2, c = -8$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36 \quad D > 0 \text{ なので実数解は2個}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} \quad \text{よって } x = 4 \text{ または } x = -2$$

$$D=36、2個、x = 4, -2$$

10

分数解になる

$2x^2 + 3x - 2 = 0$ について、 D ・実数解の個数・解を求めよ。

$$D = \underline{25} \quad \text{個数 } \underline{2} \text{ 個} \quad x = \underline{1/2, -2}$$

$$a = 2, b = 3, c = -2$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25 \quad D > 0 \text{ なので実数解は2個}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

$$x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{または} \quad x = \frac{-8}{4} = -2$$

$$D=25、2個、x = \frac{1}{2}, -2$$

11

重解

$x^2 + 4x + 4 = 0$ について、 D ・実数解の個数・解を求めよ。

$$D = \underline{0} \quad \text{個数 } \underline{1} \text{ 個} \quad x = \underline{-2}$$

$$a = 1, b = 4, c = 4$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0 \quad D = 0 \text{ なので実数解は1個 (重解)}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$D=0、1個、x = -2 \text{ (重解)}$$

12

実数解なし

$2x^2 - 3x + 5 = 0$ について、 D ・実数解の個数・解を求めよ。

$D = \underline{-31}$ 個数 $\underline{0}$ 個 $x = \underline{\text{なし}}$

$$a = 2, b = -3, c = 5$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 9 - 40 = -31 \quad D < 0 \text{ なので実数解は0個}$$

D=-31、0個、実数解はなし

13

分数解になる

$3x^2 - 2x - 1 = 0$ について、 D ・実数解の個数・解を求めよ。

$D = \underline{16}$ 個数 $\underline{2}$ 個 $x = \underline{1, -1/3}$

$$a = 3, b = -2, c = -1$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 4 + 12 = 16 \quad D > 0 \text{ なので実数解は2個}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm 4}{6}$$

$$x = \frac{6}{6} = 1 \quad \text{または} \quad x = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

D=16、2個、 $x = 1, -\frac{1}{3}$

14

重解が分数になる

$4x^2 - 12x + 9 = 0$ について、 D ・実数解の個数・解を求めよ。

$D = \underline{0}$ 個数 $\underline{1}$ 個 $x = \underline{3/2}$

$$a = 4, b = -12, c = 9$$

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0 \quad D = 0 \text{ なので実数解は1個（重解）}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 4} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

D=0、1個、 $x = \frac{3}{2}$ （重解）

15

実数解なし

$x^2 - 3x + 5 = 0$ について、 D ・実数解の個数・解を求めよ。

$D = \underline{-11}$ 個数 $\underline{0}$ 個 $x = \underline{\text{なし}}$

$$a = 1, b = -3, c = 5$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 9 - 20 = -11 \quad D < 0 \text{ なので実数解は0個}$$

$D=-11$ 、0個、実数解はなし

挑戦 (16~20)

16

√が残る解・2解の和と積 (実際に解を求めてから計算しよう)

$x^2 - 2x - 2 = 0$ を解け。さらに、2つの解の和と積を求めよ。

2つの解の和 $\underline{2}$ 積 $\underline{-2}$

$$a = 1, b = -2, c = -2 \quad b' = -1$$

$$b'^2 - ac = (-1)^2 - 1 \cdot (-2) = 1 + 2 = 3$$

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{3}}{1} = 1 \pm \sqrt{3} \quad \text{よって解は } x = 1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}$$

$$\text{和 } (1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3}) = 2 \quad (\sqrt{3} \text{ の項が消える})$$

$$\text{積 } (1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}) = 1^2 - (\sqrt{3})^2 = 1 - 3 = -2$$

解は $x = 1 \pm \sqrt{3}$ 、和は 2、積は -2

17

√が残る解・2解の和と積

$x^2 + 4x + 1 = 0$ を解け。さらに、2つの解の和と積を求めよ。

2つの解の和 -4 積 1

$$a = 1, b = 4, c = 1 \quad b' = 2$$

$$b'^2 - ac = 2^2 - 1 \cdot 1 = 4 - 1 = 3$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{3}}{1} = -2 \pm \sqrt{3} \quad \text{よって解は } x = -2 + \sqrt{3}, -2 - \sqrt{3}$$

$$\text{和 } (-2 + \sqrt{3}) + (-2 - \sqrt{3}) = -4$$

$$\text{積 } (-2 + \sqrt{3})(-2 - \sqrt{3}) = (-2)^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1$$

解は $x = -2 \pm \sqrt{3}$ 、和は -4、積は 1

18

√が残る解・aが1でない・2解の和と積

$2x^2 - 4x - 1 = 0$ を解け。さらに、2つの解の和と積を求めよ。

2つの解の和 2 積 -1/2

$$a = 2, b = -4, c = -1 \quad b' = -2$$

$$b'^2 - ac = (-2)^2 - 2 \cdot (-1) = 4 + 2 = 6$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{よって解は } x = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{和 } \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right) + \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) = 2$$

$$\text{積 } \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) = 1^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{6}{4} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

解は $x = 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$ 、和は 2、積は $-\frac{1}{2}$

19

重解になる k の値（2つあるのでコンマ区切り） $x^2 + kx + 9 = 0$ が重解をもつような k の値をすべて求めよ。

$$k = \underline{6, -6}$$

重解をもつ $\iff D = 0$

$$D = k^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = k^2 - 36$$

$$k^2 - 36 = 0 \text{ より } k^2 = 36、\text{よって } k = \pm 6$$

確認： $k = 6$ のとき $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2 = 0$ （重解 $x = -3$ ）。 $k = -6$ のとき $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 = 0$ （重解 $x = 3$ ）。どちらも重解になる。

$$k = 6, -6$$

20

実数解をもつ k の範囲（端点の値のみ入力） $x^2 - 4x + k = 0$ が実数解をもつのは、 k がある値以下のときである。その値（境界の値）を求めよ。

$$k \leq \underline{4}$$

実数解をもつ（重解も含む） $\iff D \geq 0$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k = 16 - 4k$$

$$16 - 4k \geq 0 \text{ より } 4k \leq 16、\text{よって } k \leq 4$$

$$k \leq 4 \text{（境界の値は 4）}$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。文字係数・共通解・整数解の条件など、入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

文字係数（2次方程式でなくなる場合に注意）

k を実数の定数とする。2次方程式 $kx^2 - 4x + 2 = 0$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $k = 0$ のとき、実数解は何個あるか。
(2) $k \neq 0$ のとき、異なる2つの実数解をもつような k の値の範囲を求めよ。

(1) 実数解の個数 1 個 (2) $k < \underline{2}$ (かつ $k \neq 0$)

(1) $k = 0$ を代入すると、方程式は $-4x + 2 = 0$ となり、これは2次方程式ではなく1次方程式。

$-4x + 2 = 0$ より $x = \frac{1}{2}$ 、実数解はちょうど1個（「 x^2 の係数が0」=2次方程式でなくなる、というのがこの問題のポイント）。

(2) $k \neq 0$ のとき、これは本当の2次方程式。判別式 D を計算する。

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot k \cdot 2 = 16 - 8k$$

異なる2つの実数解をもつ $\iff D > 0$

$$16 - 8k > 0 \text{ より } 8k < 16, \text{ よって } k < 2$$

これに $k \neq 0$ の条件を重ねる。

(1) 実数解は1個 (2) $k < 2$ かつ $k \neq 0$

2つの2次方程式 $x^2 + ax + 2 = 0$ と $x^2 + 2x + a = 0$ がただ1つの共通の実数解をもつとき、定数 a の値と、その共通解を求めよ。

$$a = \underline{-3} \quad \text{共通解 } x = \underline{1}$$

共通解を x とすると、2式はどちらも成り立つので、辺々を引いて x の次数を下げる。

$$(x^2 + ax + 2) - (x^2 + 2x + a) = 0$$

$$(a - 2)x + (2 - a) = 0$$

$$(a - 2)x - (a - 2) = 0$$

$$(a - 2)(x - 1) = 0$$

よって $a = 2$ または $x = 1$

【 $a = 2$ の場合を確認】 もとの式は $x^2 + 2x + 2 = 0$ となり、 $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4 < 0$ 。実数解をもたないので、 $a = 2$ は共通の実数解を作らない(不適)。

【 $x = 1$ の場合】 $x = 1$ を $x^2 + ax + 2 = 0$ に代入すると $1 + a + 2 = 0$ より $a = -3$ 。

検算 (もう一方の式) : $x^2 + 2x + a = 0$ に $a = -3$, $x = 1$ を代入すると $1 + 2 - 3 = 0$ (成り立つ)。

さらに検算 : $a = -3$ のとき $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 1, 2$ 。 $x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = -3, 1$ 。共通する解は $x = 1$ のみで、確かに条件を満たす。

$$a = -3、\text{共通解 } x = 1$$

a を定数とする。2次方程式 $x^2 - (a + 2)x + 2a = 0$ は、 a の値に関係なく整数の解を1つもつ。その解を求めよ。また、 $a = 5$ のときのもう一方の解を求めよ。

つねに解となる値 $x = \underline{2}$ $a = 5$ のときのもう一方の解 $x = \underline{5}$

左辺を因数分解できないか調べる。かけて $2a$ 、足して $-(a + 2)$ になる組み合わせを探すと、 -2 と $-a$ が候補になる ($(-2) \times (-a) = 2a$ 、 $(-2) + (-a) = -(a + 2)$)。

よって $x^2 - (a + 2)x + 2a = (x - 2)(x - a)$

検算： $(x - 2)(x - a) = x^2 - ax - 2x + 2a = x^2 - (a + 2)x + 2a$ (もとの式と一致)

$AB = 0$ の原理より $x - 2 = 0$ または $x - a = 0$ 、すなわち $x = 2$ または $x = a$ 。

$x = 2$ は a の値に関係なく必ず現れる解（つねに整数）。もう一方の解は $x = a$ で、 a の値そのものになる。

$a = 5$ のとき、もう一方の解は $x = 5$ 。

検算： $a = 5$ のとき方程式は $x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 2, 5$ (練習問題2と同じ式になっている)。

つねに解となる値は $x = 2$ 、 $a = 5$ のときのもう一方の解は $x = 5$

k は 1 以上 15 以下の自然数とする。2次方程式 $x^2 - x - k = 0$ が整数の解をもつような k の値をすべて求めよ（小さい順にコンマ区切りで入力）。

$k =$ 2,6,12

解の公式を使うために、まず判別式を求める。

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-k) = 1 + 4k$$

実数解をもつには $D \geq 0$ が必要（ $k \geq 1$ なら自動的に満たす）が、さらに**解が整数**になるには D が平方数（ある整数の2乗）であり、かつ $\sqrt{D}$ が奇数である必要がある（ $x = \frac{1 \pm \sqrt{D}}{2}$ が整数になるには、分子 $1 \pm \sqrt{D}$ が偶数、つまり $\sqrt{D}$ が奇数でなければならない）。

$$\sqrt{D} = 2t + 1 \quad (t \text{ は } 0 \text{ 以上の整数}) \text{ とおくと}$$

$$D = (2t + 1)^2 = 4t^2 + 4t + 1$$

$$1 + 4k = 4t^2 + 4t + 1 \text{ より } 4k = 4t^2 + 4t, \text{ よって } k = t^2 + t = t(t + 1)$$

$$t = 0 : k = 0 \text{ (範囲外、} k \geq 1 \text{ を満たさない)}$$

$$t = 1 : k = 2$$

$$t = 2 : k = 6$$

$$t = 3 : k = 12$$

$$t = 4 : k = 20 \text{ (範囲外、} k \leq 15 \text{ を満たさない)}$$

よって $1 \leq k \leq 15$ の範囲で条件を満たすのは $k = 2, 6, 12$ 。

$$\text{検算 : } k = 2 : x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 2, -1 \text{ (整数)}。$$

$$k = 6 : x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 3, -2 \text{ (整数)}。$$

$$k = 12 : x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 3) = 0 \Rightarrow x = 4, -3 \text{ (整数)}。すべて確認できた。$$

$$k = 2, 6, 12$$

2次方程式 $x^2 - 4x + m = 0$ の2つの実数解の差が **2** であるとき、定数 m の値を求めよ。

$$m = \underline{\underline{3}}$$

b' の公式を使う ($a = 1, b = -4, c = m, b' = -2$)。

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - m}}{1} = 2 \pm \sqrt{4 - m}$$

(実数解をもつには $4 - m \geq 0$ 、すなわち $m \leq 4$ が前提)

2つの解は $x = 2 + \sqrt{4 - m}$ と $x = 2 - \sqrt{4 - m}$ 。大きい方から小さい方を引くと
 差 $= (2 + \sqrt{4 - m}) - (2 - \sqrt{4 - m}) = 2\sqrt{4 - m}$

これが **2** に等しいとき

$$2\sqrt{4 - m} = 2 \text{ より } \sqrt{4 - m} = 1$$

両辺を2乗して $4 - m = 1$ 、よって $m = 3$ ($m \leq 4$ も満たす)

検算： $m = 3$ のとき $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 1, 3$ 。差は
 $3 - 1 = 2$ (条件と一致)。

$$m = 3$$