

軸や区間が動く最大・最小（場合分け）

解答（全21問）

氏名 _____

得点 /21点

DRILL

練習問題（全16問）

基本（1～6）

1

区間が動く型： $a>0$

$y = x^2$ ($a \leq x \leq a + 2$) で $a = 1$ のときの最小値を求めよ。

最小値 1 そのとき $x =$ 1

$a = 1 > 0$ なので、区間 $[1, 3]$ は軸 $x = 0$ より右 $\rightarrow$ 区間内はずっと増加。
最小は左端 $x = 1$ 。

$x = 1$ のとき最小値 1

2

区間が動く型： $a+2<0$

$y = x^2$ ($a \leq x \leq a+2$) で $a = -3$ のときの最小値を求めよ。

最小値 1 そのとき $x =$ -1

$a = -3$ なので $a+2 = -1 < 0$ 、区間 $[-3, -1]$ は軸 $x = 0$ より左 $\rightarrow$ 区間内はずっと減少。

最小は右端 $x = -1$ 。

$x = -1$ のとき最小値 1

3

区間が動く型：軸が区間の中

$y = x^2$ ($a \leq x \leq a+2$) で $a = -1$ のときの最小値を求めよ。

最小値 0 そのとき $x =$ 0

$a = -1$ なので区間は $[-1, 1]$ 。 $a \leq 0 \leq a+2$ ($-1 \leq 0 \leq 1$) が成り立ち、軸 $x = 0$ が区間の中にある。

最小は頂点 $x = 0$ 。

$x = 0$ のとき最小値 0

4

軸が動く型： $a < 0$

$y = x^2 - 2ax + 3$ ($0 \leq x \leq 2$) で $a = -1$ のときの最小値を求めよ。

最小値 3 そのとき $x =$ 0

$a = -1$ なので軸は $x = -1$ 。軸が区間 $[0, 2]$ より左 $\rightarrow$ 区間内はずっと増加。

最小は左端 $x = 0$ 。 $y = 0^2 - 2(-1)(0) + 3 = 3$ 。

$x = 0$ のとき最小値 3

5

軸が動く型：軸が区間の中

$y = x^2 - 2ax + 3$ ($0 \leq x \leq 2$) で $a = 1$ のときの最小値を求めよ。

最小値 2 そのとき $x =$ 1

$a = 1$ なので軸は $x = 1$ 、区間 $[0, 2]$ の中にある。

最小は頂点 $x = 1$ 。 $y = 3 - 1^2 = 2$ 。

$x = 1$ のとき最小値 2

6

軸が動く型： $a > 2$

$y = x^2 - 2ax + 3$ ($0 \leq x \leq 2$) で $a = 3$ のときの最小値を求めよ。

最小値 -5 そのとき $x =$ 2

$a = 3$ なので軸は $x = 3$ 、区間 $[0, 2]$ より右 $\rightarrow$ 区間内はずっと減少。

最小は右端 $x = 2$ 。 $y = 4 - 4(3) + 3 = -5$ 。

$x = 2$ のとき最小値 -5

標準 (7~12) ※自分でどの場合か判定しよう

7

$y = x^2 - 4x + 5$ ($0 \leq x \leq a$ 、ただし $a > 0$) で $a = 1$ のときの最小値を求めよ。

最小値 2 そのとき $x =$ 1

$y = (x - 2)^2 + 1$ 、軸は $x = 2$ (固定)。 $a = 1$ なので区間は $[0, 1]$ 、軸 2 より左にある ($a < 2$) $\rightarrow$ 区間内はずっと減少。

最小は右端 $x = 1$ 。 $y = (1 - 2)^2 + 1 = 2$ 。

$x = 1$ のとき最小値 2

- 8 $y = x^2 - 4x + 5$ ($0 \leq x \leq a$ 、ただし $a > 0$) で $a = 3$ のときの最小値を求めよ。

最小値 1 そのとき $x =$ 2

$y = (x - 2)^2 + 1$ 、軸は $x = 2$ 。 $a = 3$ なので区間は $[0, 3]$ 、軸 2 を含む ($a \geq 2$)
→ 頂点が区間内にある。

最小は頂点 $x = 2$ 。 $y = 1$ 。

$x = 2$ のとき最小値 1

- 9 境界のちょうど $a=2$ で確認

$y = x^2 - 4x + 5$ ($0 \leq x \leq a$ 、ただし $a > 0$) で $a = 2$ のときの最小値を求めよ。

最小値 1 そのとき $x =$ 2

$y = (x - 2)^2 + 1$ 、軸は $x = 2$ 。 $a = 2$ のとき区間は $[0, 2]$ で、軸がちょうど右端に一致する (境界)。

このときも頂点は区間に含まれるので、最小は頂点 $x = 2$ 。 $y = 1$ 。

$x = 2$ のとき最小値 1

- 10 $y = -x^2 + 2ax$ ($0 \leq x \leq 2$) で $a = 0.5$ のときの最大値を求めよ。

最大値 0.25 そのとき $x =$ 0.5

$y = -x^2 + 2ax = -(x - a)^2 + a^2$ 、軸は $x = a$ 。 $a = 0.5$ は区間 $[0, 2]$ の中 → 頂点が区間内。

最大は頂点 $x = 0.5$ 。 $y = a^2 = 0.25$ 。

$x = 0.5$ のとき最大値 0.25

11 $y = -x^2 + 2ax$ ($0 \leq x \leq 2$) で $a = 3$ のときの最大値を求めよ。

最大値 8 そのとき $x =$ 2

$y = -(x - a)^2 + a^2$ 、軸は $x = 3$ 。区間 $[0, 2]$ は軸より左 ($a > 2$) $\rightarrow$ 区間内はずっと増加。

最大は右端 $x = 2$ 。 $y = -(2 - 3)^2 + 9 = -1 + 9 = 8$ 。

$x = 2$ のとき最大値 8

12 $y = -x^2 + 2ax$ ($0 \leq x \leq 2$) で $a = -1$ のときの最大値を求めよ。

最大値 0 そのとき $x =$ 0

$y = -(x - a)^2 + a^2$ 、軸は $x = -1$ 。区間 $[0, 2]$ は軸より右 ($a < 0$) $\rightarrow$ 区間内はずっと減少。

最大は左端 $x = 0$ 。 $y = -(0 - (-1))^2 + (-1)^2 = -1 + 1 = 0$ 。

$x = 0$ のとき最大値 0

13

区間が動く型・自分で完成させる

$y = x^2 - 4x$ ($a \leq x \leq a + 2$) の最小値を a の式で表せ (場合分けを完成させよ)。

$y = (x - 2)^2 - 4$ 、軸は $x = 2$ (固定)。区間 $[a, a + 2]$ と軸 2 の位置関係で3通り。

(1) $a + 2 < 2$ (すなわち $a < 0$) のとき

区間全体が軸より左 → 区間内はずっと減少。

最小は右端 $x = a + 2$ で、 $y = (a + 2 - 2)^2 - 4 = a^2 - 4$ 。

(2) $a \leq 2 \leq a + 2$ (すなわち $0 \leq a \leq 2$) のとき

軸 $x = 2$ が区間の中にある。

最小は頂点 $x = 2$ で、 $y = -4$ 。

(3) $a > 2$ のとき

区間全体が軸より右 → 区間内はずっと増加。

最小は左端 $x = a$ で、 $y = (a - 2)^2 - 4$ 。

$a < 0$ のとき最小値 $a^2 - 4$ ($x = a + 2$) / $0 \leq a \leq 2$ のとき最小値 -4 ($x = 2$)
 $/ a > 2$ のとき最小値 $(a - 2)^2 - 4$ ($x = a$)

$y = x^2 - 2ax + 1$ ($-1 \leq x \leq 1$) の最小値を a の式で表せ (場合分けを完成させよ)。

$y = (x - a)^2 + 1 - a^2$ 、軸は $x = a$ 。固定区間 $[-1, 1]$ と軸 a の位置関係で3通り。

(1) $a < -1$ のとき

軸が区間より左 $\rightarrow$ 区間内はずっと増加。

最小は左端 $x = -1$ で、 $y = (-1 - a)^2 + 1 - a^2 = 1 + 2a + a^2 + 1 - a^2 = 2a + 2$ 。

(2) $-1 \leq a \leq 1$ のとき

軸 $x = a$ が区間の中にある。

最小は頂点 $x = a$ で、 $y = 1 - a^2$ 。

(3) $a > 1$ のとき

軸が区間より右 $\rightarrow$ 区間内はずっと減少。

最小は右端 $x = 1$ で、 $y = (1 - a)^2 + 1 - a^2 = 1 - 2a + a^2 + 1 - a^2 = 2 - 2a$ 。

$a < -1$ のとき最小値 $2a + 2$ ($x = -1$) $\swarrow -1 \leq a \leq 1$ のとき最小値 $1 - a^2$ ($x = a$) $\swarrow a > 1$ のとき最小値 $2 - 2a$ ($x = 1$)

$y = -x^2 + 2ax - 1$ ($0 \leq x \leq 4$) の最大値を a の式で表せ (場合分けを完成させよ)。

$y = -x^2 + 2ax - 1 = -(x - a)^2 + a^2 - 1$ 、軸は $x = a$ 。固定区間 $[0, 4]$ と軸 a の位置関係で3通り。

(1) $a < 0$ のとき

軸が区間より左 $\rightarrow$ 区間内はずっと減少。

最大は左端 $x = 0$ で、 $y = -(0 - a)^2 + a^2 - 1 = -a^2 + a^2 - 1 = -1$ 。

(2) $0 \leq a \leq 4$ のとき

軸 $x = a$ が区間の中にある。

最大は頂点 $x = a$ で、 $y = a^2 - 1$ 。

(3) $a > 4$ のとき

軸が区間より右 $\rightarrow$ 区間内はずっと増加。

最大は右端 $x = 4$ で、 $y = -(4 - a)^2 + a^2 - 1 = -(16 - 8a + a^2) + a^2 - 1 = 8a - 17$ 。

$a < 0$ のとき最大値 -1 ($x = 0$) / $0 \leq a \leq 4$ のとき最大値 $a^2 - 1$ ($x = a$) / $a > 4$ のとき最大値 $8a - 17$ ($x = 4$)

$y = x^2 - 2ax + 3$ ($0 \leq x \leq 2$) の最小値が -1 になるような a の値をすべて求めよ。(複数あるときは「,」区切りで入力)

$$a = \underline{2}$$

STEP3で求めた場合分けを使う。

$a < 0$ のとき最小値 3 ($x = 0$) / $0 \leq a \leq 2$ のとき最小値 $3 - a^2$ ($x = a$) /
 $a > 2$ のとき最小値 $7 - 4a$ ($x = 2$)

それぞれの場合について、最小値が -1 になるかを調べる。

(1) $a < 0$ のとき：最小値は常に 3 なので、 $3 = -1$ は成り立たない → 解なし。

(2) $0 \leq a \leq 2$ のとき： $3 - a^2 = -1$ を解くと $a^2 = 4$ より $a = 2$ または $a = -2$ 。

このうち範囲 $0 \leq a \leq 2$ に入るのは $a = 2$ だけ ($a = -2$ はこの場合分けの範囲外なので不適)。

(3) $a > 2$ のとき： $7 - 4a = -1$ を解くと $a = 2$ 。しかしこの場合分けは $a > 2$ が条件なので、 $a = 2$ は含まれない → この場合からは解が出ない (すでに (2) で $a = 2$ を得ている)。

以上より、条件を満たす a は $a = 2$ のみ。($a = -2$ は方程式 $3 - a^2 = -1$ の解ではあるが、その場合分けの範囲 $0 \leq a \leq 2$ に入らないため除かれる、という点に注意。)

$$a = 2$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。入試の基礎レベルに挑戦しよう。

$y = x^2 - 2ax + a^2 - 2a + 3$ ($0 \leq x \leq 4$) の最小値を $m(a)$ とする。 $m(a)$ を a の場合分けで表し、さらに $m(a)$ 自身がとりうる値の中でいちばん小さい値と、そのときの a の値を求めよ。

$m(a)$ の最小値 -6 そのとき $a =$ 5

まず平方完成する。 $y = x^2 - 2ax + a^2 - 2a + 3 = (x - a)^2 + (-2a + 3)$ 。軸は $x = a$ （動く）、区間は $[0, 4]$ （固定）。軸 a と区間 $[0, 4]$ の位置関係で3通りに場合分けする。

(1) $a < 0$ のとき：軸が区間より左 → 区間内はずっと増加。最小は左端 $x = 0$ で、 $y = 0 - 0 + a^2 - 2a + 3 = a^2 - 2a + 3$ 。

(2) $0 \leq a \leq 4$ のとき：軸 $x = a$ が区間の中にある → 頂点そのものが区間内。最小は頂点 $x = a$ で、 $y = -2a + 3$ 。

(3) $a > 4$ のとき：軸が区間より右 → 区間内はずっと減少。最小は右端 $x = 4$ で、 $y = 16 - 8a + a^2 - 2a + 3 = a^2 - 10a + 19$ 。

$$m(a) = a^2 - 2a + 3 \ (a < 0) \quad / \quad m(a) = -2a + 3 \ (0 \leq a \leq 4) \quad / \quad m(a) = a^2 - 10a + 19 \ (a > 4)$$

ここまでで $m(a)$ が求まった。次に、この $m(a)$ 自身がいちばん小さくなる a を探す。3つの式それぞれの範囲内での最小をチェックする。

(1) $a < 0$ の範囲： $m(a) = a^2 - 2a + 3 = (a - 1)^2 + 2$ は $a = 1$ で最小になる山型だが、この式が使えるのは $a < 0$ の範囲だけ。 $a = 1$ はこの範囲に入らないので、 $a < 0$ の中では a が 0 に近づくほど値が小さくなっていき、 $a \rightarrow 0$ で $m(a) \rightarrow 3$ に近づく（ $a = 0$ ちょうどは次の場合分けに含まれる）。つまりこの範囲で $m(a)$ は 3 より大きい値しかとらない。

(2) $0 \leq a \leq 4$ の範囲： $m(a) = -2a + 3$ は a が増えるほど単調に減る直線。範囲の右端 $a = 4$ でいちばん小さくなり、 $m(4) = -8 + 3 = -5$ 。

(3) $a > 4$ の範囲： $m(a) = a^2 - 10a + 19 = (a - 5)^2 - 6$ 。この式は $a = 5$ で最小値 -6 をとり、 $a = 5$ はちょうど $a > 4$ の範囲に入っている（有効）。範囲の左端 $a = 4$ では $m(4) = 16 - 40 + 19 = -5$ ((2) の右端と一致し、つながってい

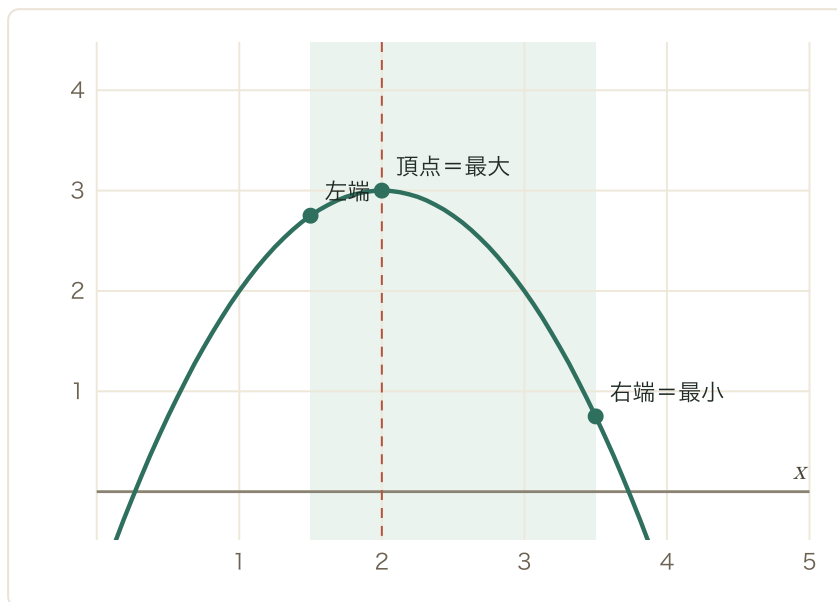
る)。

以上の3つの範囲を比べると、(1) は 3 より大きい、(2) の最小は -5 、(3) の最小は $a = 5$ のときの -6 。いちばん小さいのは -6 である。

$m(a)$ 自身の最小値は $a = 5$ のとき -6

$y = -x^2 + 4x - 1$ ($a \leq x \leq a + 2$) について、 $a = 1.5$ のときの最大値・最小値をそれぞれ求めよ。さらに、一般の a について最大値・最小値をそれぞれ場合分けで表せ（解説内で確認）。

$a = 1.5$ のとき 最大値 3 最小値 0.75



$a = 1.5$ のとき、区間 $[1.5, 3.5]$ は軸 $x = 2$ を含む $\rightarrow$ 最大は頂点 3、最小は軸から遠い右端で 0.75

$y = -x^2 + 4x - 1 = -(x - 2)^2 + 3$ 。軸は $x = 2$ （固定）、頂点の高さは 3。区間は $[a, a + 2]$ （幅 2 で動く）。

【 $a = 1.5$ のとき】区間は $[1.5, 3.5]$ 。

最大値：軸 $x = 2$ が区間 $[1.5, 3.5]$ の中にある ($1.5 \leq 2 \leq 3.5$) ので、頂点があるまま区間内。最大は頂点 $x = 2$ で $y = 3$ 。

最小値：上に凸の放物線では、頂点から遠い端点ほど y が小さくなる。軸 2 からの距離は、左端 1.5 が 0.5、右端 3.5 が 1.5。右端の方が軸から遠いので、最小は右端 $x = 3.5$ で $y = -(3.5 - 2)^2 + 3 = -2.25 + 3 = 0.75$ 。

$a = 1.5$ のとき最大値 3 ($x = 2$)、最小値 0.75 ($x = 3.5$)

【一般の a のとき：最大値】軸 $x = 2$ と区間 $[a, a + 2]$ の位置関係で 3 通り。

(1) $a + 2 < 2$ (すなわち $a < 0$) のとき：区間全体が軸より左。上に凸のグラフは軸より左側ですずっと増加するので、区間内もずっと増加。最大は右端 $x = a + 2$ で、 $y = -(a + 2)^2 + 4(a + 2) - 1 = -a^2 + 3$ 。

(2) $a \leq 2 \leq a + 2$ (すなわち $0 \leq a \leq 2$) のとき：軸が区間の中にある。最大は

頂点 $x = 2$ で $y = 3$ 。

(3) $a > 2$ のとき：区間全体が軸より右。上に凸のグラフは軸より右側でずっと減少するので、区間内もずっと減少。最大は左端 $x = a$ で、 $y = -a^2 + 4a - 1$ 。

最大値： $a < 0$ のとき $3 - a^2$ ($x = a + 2$) / $0 \leq a \leq 2$ のとき 3 ($x = 2$) /
 $a > 2$ のとき $-a^2 + 4a - 1$ ($x = a$)

【一般の a のとき：最小値】上に凸では最小は「軸から遠い方の端点」で起こる。区間の中央 $x = a + 1$ と軸 2 の大小で比べる。

(1) $a + 1 < 2$ (すなわち $a < 1$) のとき：中央が軸より左 → 軸は区間の右寄り → 軸から遠いのは左端 $x = a$ 。 $y = -a^2 + 4a - 1$ 。

(2) $a + 1 = 2$ (すなわち $a = 1$) のとき：中央がちょうど軸と一致 → 両端 $x = 1, 3$ が軸から等距離 → 最小は両端で同時に起こる。 $y = -1 + 4 - 1 = 2$ 。

(3) $a + 1 > 2$ (すなわち $a > 1$) のとき：中央が軸より右 → 軸から遠いのは右端 $x = a + 2$ 。 $y = -(a + 2)^2 + 4(a + 2) - 1 = -a^2 + 3$ 。

最小値： $a < 1$ のとき $-a^2 + 4a - 1$ ($x = a$) / $a = 1$ のとき 2 ($x = 1, 3$) /
 $a > 1$ のとき $3 - a^2$ ($x = a + 2$)

$y = x^2 - 6x + 5$ ($a \leq x \leq 2a$ 、ただし $a > 0$) について、 $a = 1$ のときの最小値を求めよ。

最小値 -3 そのとき $x =$ 2

$y = x^2 - 6x + 5 = (x - 3)^2 - 4$ 。軸は $x = 3$ (固定)。区間 $[a, 2a]$ は左端も右端も a で動き、しかも幅 $2a - a = a$ 自体が a とともに変わる点がこれまでとの違い。まず軸 3 と区間 $[a, 2a]$ の位置関係を一般に整理しておく。

(1) $2a < 3$ (すなわち $0 < a < 1.5$) のとき：区間全体が軸より左 → 区間内はずっと減少。最小は右端 $x = 2a$ 。

(2) $a \leq 3 \leq 2a$ (すなわち $1.5 \leq a \leq 3$) のとき：軸が区間の中にある。最小は頂点 $x = 3$ で $y = -4$ 。

(3) $a > 3$ のとき：区間全体が軸より右 → 区間内はずっと増加。最小は左端 $x = a$ 。

$a = 1$ はこのうち (1) ($0 < 1 < 1.5$) にあたる。区間は $[1, 2]$ 、軸 3 は区間よりずっと右にあるので、区間内は x が増えるほど y が減り続ける (区間内はずっと減少)。

最小は右端 $x = 2a = 2$ で、 $y = 2^2 - 6(2) + 5 = 4 - 12 + 5 = -3$ 。

$a = 1$ のとき、 $x = 2$ で最小値 -3

$y = x^2$ ($a \leq x \leq a + 2$) の最小値が 4 になるような a の値をすべて求めよ。
(複数あるときは「,」区切りで入力)

$a =$ -4,2

STEP2で求めた場合分けを使う。軸は $x = 0$ (固定)、区間は $[a, a + 2]$ (幅2で動く)。

$a < -2$ のとき最小値 $(a + 2)^2$ ($x = a + 2$) / $-2 \leq a \leq 0$ のとき最小値 0 ($x = 0$) / $a > 0$ のとき最小値 a^2 ($x = a$)

それぞれの場合について、最小値が 4 になるかを調べる。

(1) $a < -2$ のとき： $(a + 2)^2 = 4$ を解くと $a + 2 = \pm 2$ 、すなわち $a = 0$ または $a = -4$ 。このうち範囲 $a < -2$ に入るのは $a = -4$ だけ ($a = 0$ はこの場合分けの範囲外なので不適)。

(2) $-2 \leq a \leq 0$ のとき：最小値は常に 0 なので、 $0 = 4$ は成り立たない → 解なし。

(3) $a > 0$ のとき： $a^2 = 4$ を解くと $a = \pm 2$ 。このうち範囲 $a > 0$ に入るのは $a = 2$ だけ ($a = -2$ は不適)。

以上より、条件を満たす a は $a = -4$ と $a = 2$ の2つ。

$a = -4, 2$

$y = x^2 - 2ax + 3$ ($0 \leq x \leq 2$) の最小値が常に 0 以上になるような a の値の範囲を求めよ。

STEP3で求めた場合分けを使う。軸は $x = a$ （動く）、区間は $[0, 2]$ （固定）。

$a < 0$ のとき最小値 3 ($x = 0$) / $0 \leq a \leq 2$ のとき最小値 $3 - a^2$ ($x = a$) / $a > 2$ のとき最小値 $7 - 4a$ ($x = 2$)

「最小値が 0 以上」という条件を、3つの場合それぞれで確認する。

(1) $a < 0$ のとき：最小値は常に 3 。 $3 \geq 0$ は常に成り立つ → この範囲の a はすべて条件を満たす。

(2) $0 \leq a \leq 2$ のとき： $3 - a^2 \geq 0$ を解くと $a^2 \leq 3$ 、すなわち $-\sqrt{3} \leq a \leq \sqrt{3}$ 。これと範囲 $0 \leq a \leq 2$ を合わせると ($\sqrt{3} \approx 1.73 < 2$ なので)、 $0 \leq a \leq \sqrt{3}$ が条件を満たす。

(3) $a > 2$ のとき： $7 - 4a \geq 0$ を解くと $a \leq 1.75$ 。これは範囲 $a > 2$ と重ならない → この範囲では条件を満たす a はない。

3つの結果をつなげると、 $a < 0$ はすべてOK、かつ $0 \leq a \leq \sqrt{3}$ もOKなので、合わせて $a \leq \sqrt{3}$ が答え ($a > \sqrt{3}$ では、(2) の範囲内でも $3 - a^2 < 0$ となり条件を満たさなくなる)。

$$a \leq \sqrt{3}$$