

2次関数の最大値・最小値

解答（全25問）

氏名 _____

得点 _____ / 25点

DRILL

練習問題（全20問）

基本（1～8）

1

区間指定なし

$y = x^2 - 6x + 8$ の最小値を求めよ。

最小値 -1 そのとき $x =$ 3

$$y = (x - 3)^2 - 1$$

下に凸なので頂点が最小。

$x = 3$ のとき最小値 -1

2

区間指定なし

$y = x^2 + 4x + 1$ の最小値を求めよ。

最小値 -3 そのとき $x =$ -2

$$y = (x + 2)^2 - 3$$

$x = -2$ のとき最小値 -3

3

区間指定なし・aが1でない

 $y = 2x^2 - 4x + 5$ の最小値を求めよ。最小値 3 そのとき $x =$ 1

$$y = 2(x^2 - 2x) + 5 = 2(x - 1)^2 - 2 + 5 = 2(x - 1)^2 + 3$$

 $x = 1$ のとき最小値 3

4

区間指定なし・上に凸

 $y = -2x^2 + 8x - 3$ の最大値を求めよ。最大値 5 そのとき $x =$ 2

$$y = -2(x^2 - 4x) - 3 = -2(x - 2)^2 + 8 - 3 = -2(x - 2)^2 + 5$$

上に凸なので頂点が最大。

 $x = 2$ のとき最大値 5

5

パターンA：軸が区間の中

 $y = x^2 + 2x - 1$ ($-2 \leq x \leq 1$) の最大値・最小値を求めよ。最大値 2 ($x =$ 1) 最小値 -2 ($x =$ -1)

$$y = (x + 1)^2 - 2 \quad \text{軸 } x = -1 \text{ は区間 } [-2, 1] \text{ の中。}$$

$$x = -2 \rightarrow -1 \quad x = -1 \rightarrow -2 \text{ (頂点)} \quad x = 1 \rightarrow 2$$

 $x = 1$ で最大値 2、 $x = -1$ で最小値 -2

6

パターンB：軸が区間の外（左）

$y = x^2 - 2x$ ($3 \leq x \leq 6$) の最大値・最小値を求めよ。

最大値 24 ($x = \underline{6}$) 最小値 3 ($x = \underline{3}$)

$y = (x - 1)^2 - 1$ 軸 $x = 1$ は区間 $[3, 6]$ より左側 → 区間内は単調増加。
 $x = 3 \rightarrow 3$ $x = 6 \rightarrow 24$

$x = 6$ で最大値 24、 $x = 3$ で最小値 3

7

パターンC：軸が区間の外（右）

$y = x^2 - 8x + 10$ ($0 \leq x \leq 3$) の最大値・最小値を求めよ。

最大値 10 ($x = \underline{0}$) 最小値 -5 ($x = \underline{3}$)

$y = (x - 4)^2 - 6$ 軸 $x = 4$ は区間 $[0, 3]$ より右側 → 区間内は単調減少。
 $x = 0 \rightarrow 10$ $x = 3 \rightarrow -5$

$x = 0$ で最大値 10、 $x = 3$ で最小値 -5

8

パターンA：軸が区間の中

$y = x^2 - 4x + 5$ ($1 \leq x \leq 4$) の最大値・最小値を求めよ。

最大値 5 ($x = \underline{4}$) 最小値 1 ($x = \underline{2}$)

$y = (x - 2)^2 + 1$ 軸 $x = 2$ は区間 $[1, 4]$ の中。
 $x = 1 \rightarrow 2$ $x = 2 \rightarrow 1$ (頂点) $x = 4 \rightarrow 5$

$x = 4$ で最大値 5、 $x = 2$ で最小値 1

9 $y = x^2 - 2x - 3$ ($2 \leq x \leq 4$) の最大値・最小値を求めよ。

最大値 5 ($x =$ 4 $)$ 最小値 -3 ($x =$ 2 $)$

$y = (x - 1)^2 - 4$ 軸 $x = 1$ は区間 $[2, 4]$ より左側 $\rightarrow$ 区間内は単調増加。
 $x = 2 \rightarrow -3$ $x = 4 \rightarrow 5$

$x = 4$ で最大値 5、 $x = 2$ で最小値 -3

10 $y = -x^2 + 4x$ ($1 \leq x \leq 5$) の最大値・最小値を求めよ。

最大値 4 ($x =$ 2 $)$ 最小値 -5 ($x =$ 5 $)$

$y = -(x - 2)^2 + 4$ 軸 $x = 2$ は区間 $[1, 5]$ の中 (パターンA)。上に凸なので頂点が最大。

$x = 1 \rightarrow 3$ $x = 2 \rightarrow 4$ (頂点・最大) $x = 5 \rightarrow -5$

軸から遠い端点 $x = 5$ が最小。

$x = 2$ で最大値 4、 $x = 5$ で最小値 -5

11 $y = 2x^2 - 4x + 3$ ($0 \leq x \leq 3$) の最大値・最小値を求めよ。

最大値 9 ($x =$ 3 $)$ 最小値 1 ($x =$ 1 $)$

$y = 2(x - 1)^2 + 1$ 軸 $x = 1$ は区間 $[0, 3]$ の中。

$x = 0 \rightarrow 3$ $x = 1 \rightarrow 1$ (頂点) $x = 3 \rightarrow 9$

$x = 3$ で最大値 9、 $x = 1$ で最小値 1

12 $y = -x^2 + 4x - 1$ ($3 \leq x \leq 6$) の最大値・最小値を求めよ。

最大値 2 ($x = \underline{3}$) 最小値 -13 ($x = \underline{6}$)

$y = -(x-2)^2 + 3$ 軸 $x = 2$ は区間 $[3, 6]$ より左側にあるが、上に凸なので頂点より右側は単調減少 → 区間内はずっと減少。

$x = 3 \rightarrow 2$ $x = 6 \rightarrow -13$

$x = 3$ で最大値 2、 $x = 6$ で最小値 -13

13 $y = x^2 - 6x + 5$ ($0 \leq x \leq 4$) の最大値・最小値を求めよ。

最大値 5 ($x = \underline{0}$) 最小値 -4 ($x = \underline{3}$)

$y = (x-3)^2 - 4$ 軸 $x = 3$ は区間 $[0, 4]$ の中。

$x = 0 \rightarrow 5$ $x = 3 \rightarrow -4$ (頂点) $x = 4 \rightarrow -3$

軸から遠いのは $x = 0$ の方なので、最大は $x = 0$ 。

$x = 0$ で最大値 5、 $x = 3$ で最小値 -4

14 $y = -2x^2 - 4x + 1$ ($-3 \leq x \leq 0$) の最大値・最小値を求めよ。

最大値 3 ($x = \underline{-1}$) 最小値 -5 ($x = \underline{-3}$)

$y = -2(x^2 + 2x) + 1 = -2(x+1)^2 + 2 + 1 = -2(x+1)^2 + 3$

軸 $x = -1$ は区間 $[-3, 0]$ の中。上に凸なので頂点が最大。

$x = -3 \rightarrow -5$ $x = -1 \rightarrow 3$ (頂点) $x = 0 \rightarrow 1$

$x = -1$ で最大値 3、 $x = -3$ で最小値 -5

15 $y = \frac{1}{2}x^2 - x$ ($0 \leq x \leq 4$) の最大値・最小値を求めよ。

最大値 4 ($x = \underline{4}$) 最小値 $-\frac{1}{2}$ ($x = \underline{1}$)

$$y = \frac{1}{2}(x^2 - 2x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2} \quad \text{軸 } x=1 \text{ は区間 } [0, 4] \text{ の中。}$$
$$x=0 \rightarrow 0 \quad x=1 \rightarrow -\frac{1}{2} \text{ (頂点)} \quad x=4 \rightarrow 4$$
$$x=4 \text{ で最大値 } 4, x=1 \text{ で最小値 } -\frac{1}{2}$$

16

最大となる x が2つある

$y = x^2 - 4x + 3$ ($1 \leq x \leq 3$) の最大値・最小値を求めよ。(最大となる x が2つあるときは「1,3」のようにコンマ区切りで入力)

最大値 0 ($x = \underline{1,3}$) 最小値 -1 ($x = \underline{2}$)

$$y = (x-2)^2 - 1 \quad \text{軸 } x=2 \text{ は区間 } [1, 3] \text{ のちょうど真ん中。}$$
$$x=1 \rightarrow 0 \quad x=2 \rightarrow -1 \text{ (頂点)} \quad x=3 \rightarrow 0$$

両端が軸から同じ距離なので、最大値は両端で同時にとる。

$$x=1, 3 \text{ で最大値 } 0, x=2 \text{ で最小値 } -1$$

挑戦 (17~20)

17

頂点が区間の端にくる

$y = x^2 - 4x + 4$ ($2 \leq x \leq 5$) の最大値・最小値を求めよ。

最大値 9 ($x = \underline{5}$) 最小値 0 ($x = \underline{2}$)

$$y = (x-2)^2 \quad \text{軸 } x=2 \text{ は区間の左端ぴったり。区間内は単調増加。}$$
$$x=2 \rightarrow 0 \text{ (頂点=左端)} \quad x=5 \rightarrow 9$$
$$x=5 \text{ で最大値 } 9, x=2 \text{ で最小値 } 0$$

18

最大値と最小値の差

$y = x^2 - 2x + 2$ ($0 \leq x \leq 3$) について、最大値と最小値の差を求めよ。

差 4

$y = (x - 1)^2 + 1$ 軸 $x = 1$ は区間 $[0, 3]$ の中。

$x = 0 \rightarrow 2$ $x = 1 \rightarrow 1$ (頂点・最小) $x = 3 \rightarrow 5$ (最大)

差は $5 - 1 = 4$ 。

最大値 5、最小値 1、差は 4

19

文章題：面積の最大

周囲の長さが 20 の長方形がある。縦の長さを x とするとき、面積 S の最大値と、そのときの x を求めよ。

最大値 $S =$ 25 そのとき $x =$ 5

縦 x なら横は $10 - x$ (縦+横=周囲の半分=10)。

$S = x(10 - x) = -x^2 + 10x = -(x - 5)^2 + 25$ ($0 < x < 10$)

上に凸で軸 $x = 5$ は範囲の中。

$x = 5$ (正方形) のとき最大値 25

20

上に凸・値域

$y = -x^2 + 2x + 3$ ($0 \leq x \leq 3$) の最大値・最小値を求めよ。

最大値 4 ($x =$ 1) 最小値 0 ($x =$ 3)

$y = -(x - 1)^2 + 4$ 軸 $x = 1$ は区間 $[0, 3]$ の中。上に凸なので頂点が最大。

$x = 0 \rightarrow 3$ $x = 1 \rightarrow 4$ (頂点) $x = 3 \rightarrow 0$

軸から遠い端点 $x = 3$ が最小。

$x = 1$ で最大値 4、 $x = 3$ で最小値 0 (値域は $0 \leq y \leq 4$)

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。置き換えや2変数の条件つき最大最小など、入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

置き換え型 (t=2次式)

$y = (x^2 - 2x - 2)^2$ ($-1 \leq x \leq 3$) の最大値・最小値を求めよ。

最小値 0 (そのとき $x = \underline{1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}}$) 最大値 9 (そのとき $x = \underline{1}$)

$t = x^2 - 2x - 2$ とおく (x の2次式のかたまりをまとめて文字に置き換えるのがコツ)。

$t = (x - 1)^2 - 3$ 、 x の範囲 $-1 \leq x \leq 3$ より $x - 1$ の範囲は $-2 \leq x - 1 \leq 2$ 、よって $(x - 1)^2$ の範囲は $0 \leq (x - 1)^2 \leq 4$ 。

ゆえに t の範囲は $-3 \leq t \leq 1$ 。

もとの式は $y = t^2$ 。 t の範囲 $[-3, 1]$ の中に $t = 0$ が含まれるので、最小値は $t = 0$ のとき $y = 0$ 。

t の絶対値が最大になるのは $t = -3$ のとき ($|-3| = 3 > |1| = 1$) なので、最大値は $t = -3$ のとき $y = 9$ 。

$t = 0$ となる x : $x^2 - 2x - 2 = 0$ を解くと $x = 1 \pm \sqrt{3}$ 。

$1 + \sqrt{3} \approx 2.73$ 、 $1 - \sqrt{3} \approx -0.73$ はどちらも範囲 $[-1, 3]$ の中にあるので両方とも解。

$t = -3$ となる x : $(x - 1)^2 = 0$ より $x = 1$ のみ (ここが t 自身の最小値の場所なので1点しかない)。

$x = 1 \pm \sqrt{3}$ のとき最小値 0、 $x = 1$ のとき最大値 9

応2

2変数の条件つき最小（1文字消去）

実数 x, y が $x + y = 4$ を満たすとき、 $x^2 + y^2$ の最小値を求めよ。

最小値 8 そのとき $x = \underline{2}$ $y = \underline{2}$

条件 $x + y = 4$ より $y = 4 - x$ 。これを代入して1文字（ x だけ）の式にする。

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= x^2 + (4 - x)^2 = x^2 + 16 - 8x + x^2 = 2x^2 - 8x + 16 \\ &= 2(x^2 - 4x) + 16 = 2(x - 2)^2 - 8 + 16 = 2(x - 2)^2 + 8 \end{aligned}$$

x は実数全体を動けるので範囲の制限はなく、下に凸の頂点がそのまま最小値。

頂点は $x = 2$ のとき最小値 8。このとき $y = 4 - 2 = 2$ 。

なお $a = 2 > 0$ （下に凸）なので、 $x \rightarrow \pm\infty$ で式はいくらでも大きくなり、**最大値は存在しない**。

$x = 2, y = 2$ のとき最小値 8（最大値なし）

応3

文章題：壁を使った花壇の面積最大

学校の壁を1辺として利用し、残り3辺をフェンスで囲んで長方形の花壇を作る。フェンスの合計の長さが 24m であるとき、花壇の面積 S の最大値を求めよ。壁と平行な辺の長さを y m、壁に垂直な辺の長さを x m とする。

最大値 $S = \underline{72}$ そのとき $x = \underline{6}$ $y = \underline{12}$

フェンスを使うのは、壁に垂直な辺2本（長さ x が2本）と、壁と平行な辺1本（長さ y ）の合計3辺。

$$2x + y = 24 \text{ より } y = 24 - 2x \text{ (} x > 0, y > 0 \text{ より } 0 < x < 12\text{)}。$$

$$\begin{aligned} \text{面積 } S &= xy = x(24 - 2x) = -2x^2 + 24x \\ &= -2(x^2 - 12x) = -2(x - 6)^2 + 72 \end{aligned}$$

上に凸で、頂点の $x = 6$ は範囲 $0 < x < 12$ の中にあるので、そのまま最大値。

$$x = 6 \text{ のとき } y = 24 - 12 = 12, S = 6 \times 12 = 72。$$

$x = 6, y = 12$ のとき面積の最大値 72

ある店で1個 500円の商品を買っている。この商品を1個 x 円値下げすると、1日の販売個数が $(100 + 2x)$ 個になるという。値下げできる範囲を $0 \leq x \leq 50$ とするとき、1日の売上金額 S (円) を最大にする x の値と、そのときの売上金額を求めよ。

$x = \underline{50}$ 売上金額 $S = \underline{90000}$

売上金額 = 単価 $\times$ 個数 なので

$$S = (500 - x)(100 + 2x) = 50000 + 1000x - 100x - 2x^2 = -2x^2 + 900x + 50000$$

平方完成すると $S = -2(x - 225)^2 + 151250$ 。頂点の x 座標は 225 だが、これは範囲 $0 \leq x \leq 50$ の外（範囲より右側）。

上に凸のグラフで、頂点より左側 ($x < 225$) はずっと増加するので、範囲 $0 \leq x \leq 50$ は丸ごと増加区間にあたる。

したがって最大値は範囲の右端 $x = 50$ でとる。

$$x = 50 \text{ のとき } S = (500 - 50)(100 + 100) = 450 \times 200 = 90000。$$

（頂点の $x = 225$ をそのまま答えにするのは誤り。範囲の外かどうかを必ず確認すること。）

$x = 50$ 円値下げしたとき、売上金額の最大値 90000円

実数 x, y が $x^2 + y = 9$ 、 $x \geq 0$ 、 $y \geq 0$ を満たすとき、 $x + y$ の最大値を求めよ。

最大値 $\frac{37}{4}$ そのとき $x = \underline{\frac{1}{2}}$ $y = \underline{\frac{35}{4}}$

条件 $x^2 + y = 9$ より $y = 9 - x^2$ 。これを目的の式に代入して x だけの式にする。
 $y \geq 0$ より $9 - x^2 \geq 0$ 、 $x \geq 0$ とあわせて範囲は $0 \leq x \leq 3$ 。

$$\begin{aligned} S &= x + y = x + (9 - x^2) = -x^2 + x + 9 \\ &= -\left(x^2 - x\right) + 9 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} + 9 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{37}{4} \end{aligned}$$

上に凸で、頂点の $x = \frac{1}{2}$ は範囲 $0 \leq x \leq 3$ の中にあるので、そのまま最大値。
 $x = \frac{1}{2}$ のとき $y = 9 - \frac{1}{4} = \frac{35}{4}$ 。

$x = \frac{1}{2}, y = \frac{35}{4}$ のとき最大値 $\frac{37}{4}$ (= 9.25)