

グラフの描き方

解答（全21問）

氏名 _____

得点 _____ / 21点

DRILL

練習問題（全16問）

基本（1～6）

1

下に凸

$y = x^2 - 2x + 4$ の頂点の座標とy切片を求めよ。

頂点 $x = \underline{1}$ $y = \underline{3}$ y切片 $\underline{4}$

$$y = (x - 1)^2 + 3 \quad \text{頂点 } (1, 3)$$

$x = 0$ を代入すると $y = 4$

頂点(1, 3)、y切片4

2

下に凸

$y = x^2 + 6x + 5$ の頂点の座標とy切片を求めよ。

頂点 $x = \underline{-3}$ $y = \underline{-4}$ y切片 $\underline{5}$

$$y = (x + 3)^2 - 4 \quad \text{頂点 } (-3, -4)$$

$x = 0$ を代入すると $y = 5$

頂点(-3, -4)、y切片5

3

$y = x^2 - 8x + 10$ の頂点の座標とy切片を求めよ。

頂点 $x = \underline{4}$ $y = \underline{-6}$ y切片 $\underline{10}$

$$y = (x - 4)^2 - 6 \quad \text{頂点 } (4, -6)$$

$x = 0$ を代入すると $y = 10$

頂点(4, -6)、y切片10

4

aが1でない

$y = 2x^2 - 4x + 1$ の頂点の座標とy切片を求めよ。

頂点 $x = \underline{1}$ $y = \underline{-1}$ y切片 $\underline{1}$

$$y = 2(x^2 - 2x) + 1 = 2(x - 1)^2 - 2 + 1 = 2(x - 1)^2 - 1 \quad \text{頂点 } (1, -1)$$

$x = 0$ を代入すると $y = 1$

頂点(1, -1)、y切片1

5

定数項なし

$y = x^2 + 4x$ の頂点の座標とy切片を求めよ。

頂点 $x = \underline{-2}$ $y = \underline{-4}$ y切片 $\underline{0}$

$$y = (x + 2)^2 - 4 \quad \text{頂点 } (-2, -4)$$

$x = 0$ を代入すると $y = 0$

頂点(-2, -4)、y切片0

6

aが1でない

$y = 3x^2 - 6x + 5$ の頂点の座標とy切片を求めよ。

頂点 $x = \underline{1}$ $y = \underline{2}$ y切片 $\underline{5}$

$$y = 3(x^2 - 2x) + 5 = 3(x - 1)^2 - 3 + 5 = 3(x - 1)^2 + 2 \quad \text{頂点 } (1, 2)$$

$x = 0$ を代入すると $y = 5$

頂点(1, 2)、y切片5

標準 (7~12)

7

頂点が分数・交点2つ（交点が複数のときはコンマ区切り、ないときは「なし」と入力）

$y = x^2 - 5x + 6$ の頂点の座標・y切片・ x 軸との交点を求めよ。

頂点 $x = \underline{5/2}$ $y = \underline{-1/4}$ y切片 $\underline{6}$ 交点 $\underline{2,3}$

$$y = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \quad \text{頂点 } \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

$x = 0$ を代入すると $y = 6$

$y = 0$ とおくと $x^2 - 5x + 6 = 0$ 、因数分解して $(x - 2)(x - 3) = 0$ 、よって $x = 2, 3$

頂点(5/2, -1/4)、y切片6、交点 x=2, 3

8 $y = x^2 - x - 6$ の頂点の座標・y切片・ x 軸との交点を求めよ。

頂点 $x = \underline{1/2}$ $y = \underline{-25/4}$ y切片 $\underline{-6}$ 交点 $\underline{3, -2}$

$$y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \quad \text{頂点} \left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$$

$x = 0$ を代入すると $y = -6$

$y = 0$ とおくと $x^2 - x - 6 = 0$ 、因数分解して $(x - 3)(x + 2) = 0$ 、よって $x = 3, -2$

頂点(1/2, -25/4)、y切片-6、交点 x=3, -2

9 $y = x^2 + x - 12$ の頂点の座標・y切片・ x 軸との交点を求めよ。

頂点 $x = \underline{-1/2}$ $y = \underline{-49/4}$ y切片 $\underline{-12}$ 交点 $\underline{-4, 3}$

$$y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 12 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} \quad \text{頂点} \left(-\frac{1}{2}, -\frac{49}{4}\right)$$

$x = 0$ を代入すると $y = -12$

$y = 0$ とおくと $x^2 + x - 12 = 0$ 、因数分解して $(x + 4)(x - 3) = 0$ 、よって $x = -4, 3$

頂点(-1/2, -49/4)、y切片-12、交点 x=-4, 3

10

aが1でない

$y = 2x^2 - 8x + 6$ の頂点の座標・y切片・ x 軸との交点を求めよ。

頂点 $x = \underline{2}$ $y = \underline{-2}$ y切片 $\underline{6}$ 交点 $\underline{1, 3}$

$$y = 2(x^2 - 4x) + 6 = 2(x - 2)^2 - 8 + 6 = 2(x - 2)^2 - 2 \quad \text{頂点} (2, -2)$$

$x = 0$ を代入すると $y = 6$

$y = 0$ とおくと $2x^2 - 8x + 6 = 0$ 、両辺を2で割って $x^2 - 4x + 3 = 0$ 、因数分解して $(x - 1)(x - 3) = 0$ 、よって $x = 1, 3$

頂点(2, -2)、y切片6、交点 x=1, 3

11

交点なし

$y = x^2 - 4x + 5$ の頂点の座標・y切片・ x 軸との交点を求めよ。

頂点 $x = \underline{2}$ $y = \underline{1}$ y切片 $\underline{5}$ 交点 $\underline{\text{なし}}$

$$y = (x - 2)^2 - 4 + 5 = (x - 2)^2 + 1 \quad \text{頂点 } (2, 1)$$

$x = 0$ を代入すると $y = 5$

$$\text{判別式は } b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4 < 0$$

頂点(2, 1)、y切片5、x軸との交点はなし

12

交点なし

$y = x^2 + 2x + 3$ の頂点の座標・y切片・ x 軸との交点を求めよ。

頂点 $x = \underline{-1}$ $y = \underline{2}$ y切片 $\underline{3}$ 交点 $\underline{\text{なし}}$

$$y = (x + 1)^2 - 1 + 3 = (x + 1)^2 + 2 \quad \text{頂点 } (-1, 2)$$

$x = 0$ を代入すると $y = 3$

$$\text{判別式は } b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8 < 0$$

頂点(-1, 2)、y切片3、x軸との交点はなし

挑戦 (13~16)

13

上に凸

$y = -x^2 + 2x + 3$ の頂点の座標・y切片・ x 軸との交点を求めよ。

頂点 $x = \underline{1}$ $y = \underline{4}$ y切片 $\underline{3}$ 交点 $\underline{3, -1}$

$$y = -(x^2 - 2x) + 3 = -\{(x - 1)^2 - 1\} + 3 = -(x - 1)^2 + 4 \quad \text{頂点 } (1, 4)$$

$a = -1 < 0$ なので上に凸。

$x = 0$ を代入すると $y = 3$

$y = 0$ とおくと $-x^2 + 2x + 3 = 0$ 、両辺に -1 をかけて $x^2 - 2x - 3 = 0$ 、因数分解して $(x - 3)(x + 1) = 0$ 、よって $x = 3, -1$

頂点(1, 4) (上に凸)、y切片3、交点 $x=3, -1$

14

頂点が分数

$y = x^2 - 3x - 4$ の頂点の座標・y切片・ x 軸との交点を求めよ。

頂点 $x = \underline{3/2}$ $y = \underline{-25/4}$ y切片 $\underline{-4}$ 交点 $\underline{4, -1}$

$$y = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \quad \text{頂点 } \left(\frac{3}{2}, -\frac{25}{4}\right)$$

$x = 0$ を代入すると $y = -4$

$y = 0$ とおくと $x^2 - 3x - 4 = 0$ 、因数分解して $(x - 4)(x + 1) = 0$ 、よって $x = 4, -1$

頂点(3/2, -25/4)、y切片-4、交点 $x=4, -1$

15

x軸に接する（交点が1個のときは数値を1つだけ入力）

$y = x^2 - 6x + 9$ の頂点の座標・y切片・ x 軸との交点を求めよ。

頂点 $x = \underline{3}$ $y = \underline{0}$ y切片 $\underline{9}$ 交点 $\underline{3}$

$y = (x - 3)^2$ 頂点 $(3, 0)$ （頂点がちょうど x 軸の上にある）

$x = 0$ を代入すると $y = 9$

$y = 0$ とおくと $(x - 3)^2 = 0$ 、よって $x = 3$ （重解）

頂点 $(3, 0)$ 、y切片9、x軸とは $x=3$ で接する（交点は1つだけ）

16

交点なしの判別

$y = x^2 + 2x + 5$ の頂点の座標・y切片・ x 軸との交点を求めよ。

頂点 $x = \underline{-1}$ $y = \underline{4}$ y切片 $\underline{5}$ 交点 $\underline{\text{なし}}$

$y = (x + 1)^2 - 1 + 5 = (x + 1)^2 + 4$ 頂点 $(-1, 4)$

$x = 0$ を代入すると $y = 5$

判別式は $b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16 < 0$

頂点 $(-1, 4)$ 、y切片5、x軸との交点はない

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

絶対値つきのグラフ

$y = |x^2 - 4x + 3|$ のグラフを考える。 $1 \leq x \leq 3$ の範囲における、このグラフの最大値を求めよ。

最大値 1

まず中身の $y = x^2 - 4x + 3$ を調べる。因数分解すると $(x - 1)(x - 3)$ なので、 $x = 1, 3$ で 0 になり、 $1 < x < 3$ の間では負の値をとる（下に凸で、2つの交点の間はグラフが x 軸より下にあるため）。

絶対値をつけると、もとの値が負の部分（ $1 < x < 3$ ）だけ符号が反転し、 x 軸の上側に折り返される。つまり $1 \leq x \leq 3$ では

$$y = |x^2 - 4x + 3| = -(x^2 - 4x + 3) = -x^2 + 4x - 3$$

$$\text{これを平方完成すると } y = -(x - 2)^2 + 1$$

上に凸の放物線なので、頂点で最大値をとる。頂点は $(2, 1)$ で、 $x = 2$ はちょうど $1 \leq x \leq 3$ の範囲内にある。

最大値は1（ $x=2$ のとき）

$y = |x^2 - 4x + 3|$ のグラフと直線 $y = 2$ との共有点は何個あるか求めよ。

共有点の個数 2

応1と同じく、 $x \leq 1$ または $x \geq 3$ の範囲では $y = x^2 - 4x + 3$ (もとの式のま
ま)、 $1 < x < 3$ の範囲では $y = -x^2 + 4x - 3$ (符号反転) となる。それぞれの場
合で $y = 2$ との共有点を調べる。

(1) $x \leq 1$ または $x \geq 3$ のとき

$$x^2 - 4x + 3 = 2 \text{ より } x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\text{解の公式より } x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$\sqrt{3} \doteq 1.73$ なので $2 - \sqrt{3} \doteq 0.27$ ($x \leq 1$ を満たす)、 $2 + \sqrt{3} \doteq 3.73$ ($x \geq 3$
を満たす)

よってこの範囲に2個の解がある。

(2) $1 < x < 3$ のとき

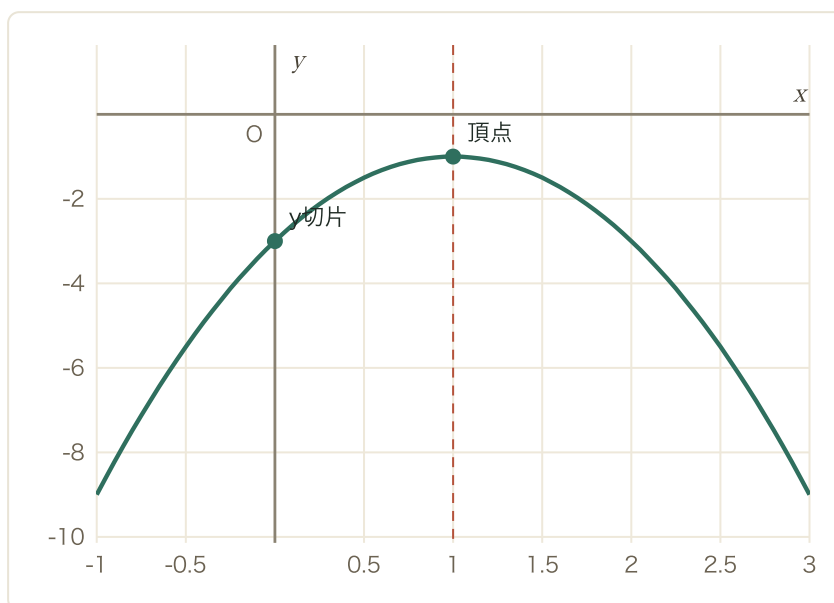
$$-x^2 + 4x - 3 = 2 \text{ より } -x^2 + 4x - 5 = 0、\text{両辺に} -1 \text{をかけて } x^2 - 4x + 5 = 0$$

判別式は $b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4 < 0$ なので実数解なし。
この範囲に解はない。

(1) (2) を合わせて、共有点は合計2個。

共有点は2個

下の図は、ある2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフである。グラフの凸の向き・軸の位置・y切片の位置から、 $a \cdot b \cdot c$ の符号をそれぞれ判定せよ（正なら「+」、負なら「-」を入力）。



軸は $x=1$ （頂点の x 座標）、 y 切片は原点より下にある。

a - b + c -

1. a の符号（凸の向き）

グラフは上に凸（山型）なので、 $a < 0$ 。

2. b の符号（軸の位置と a の符号から判定）

軸の公式は $x = -\frac{b}{2a}$ 。図より軸は $x = 1$ （0より右）なので、 $-\frac{b}{2a} > 0$ 。

すでに $a < 0$ とわかっているので $2a < 0$ 。分数全体が正になるには、分子の $-b$ も負でなければならない（負÷負＝正）。 $-b < 0$ なら $b > 0$ 。

3. c の符号（ y 切片）

$x = 0$ を代入すると $y = c$ 。図より y 切片は 0 より下（負の値）にあるので、 $c < 0$ 。

a は負、 b は正、 c は負

$y = x^2 - 2kx + k + 6$ (k は定数) のグラフが x 軸と共有点を持たないような k の値の範囲を求めよ。

グラフが x 軸と共有点を持たない条件は、 $x^2 - 2kx + k + 6 = 0$ の判別式 D が $D < 0$ となることである。

($a = 1 > 0$ なので下に凸。判別式が負であれば、グラフ全体が x 軸より上にあり、共有点を持たない)

$$D = (-2k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (k + 6) = 4k^2 - 4k - 24$$

$$D < 0 \text{ より } 4k^2 - 4k - 24 < 0$$

$$\text{両辺を4で割って } k^2 - k - 6 < 0$$

$$\text{左辺を因数分解すると } (k - 3)(k + 2) < 0$$

$$\text{よって } -2 < k < 3$$

k の値の範囲は $-2 < k < 3$

頂点が $(2, -3)$ で、点 $(4, 5)$ を通る放物線がある。この放物線の式を $y = ax^2 + bx + c$ の形で求めよ。

$$a = \underline{2} \quad b = \underline{-8} \quad c = \underline{5}$$

頂点が $(2, -3)$ とわかっているので、まず頂点形式で式を立てる。

$$y = a(x - 2)^2 - 3$$

この放物線が点 $(4, 5)$ を通るので、 $x = 4$, $y = 5$ を代入する。

$$5 = a(4 - 2)^2 - 3$$

$$5 = 4a - 3$$

$$4a = 8$$

$$a = 2$$

よって式は $y = 2(x - 2)^2 - 3$ 。これを展開して一般形に直す。

$$y = 2(x^2 - 4x + 4) - 3 = 2x^2 - 8x + 8 - 3 = 2x^2 - 8x + 5$$

$$y = 2x^2 - 8x + 5 \quad (a = 2, b = -8, c = 5)$$