

平方完成

解答（全25問）

氏名 _____

得点 _____ / 25点

DRILL

練習問題（全20問）

基本（1～8） ※すべて $a = 1$

1

xの係数・定数項がともに正

$y = x^2 + 4x + 1$ を平方完成し、頂点の座標を求めよ。

頂点 $x = \underline{-2}$ $y = \underline{-3}$

係数 4 の半分は 2、2乗すると 4。

$$y = x^2 + 4x + 4 - 4 + 1 = (x + 2)^2 - 3$$

頂点は $(-2, -3)$

2

xの係数が負

$y = x^2 - 6x + 7$ を平方完成し、頂点の座標を求めよ。

頂点 $x = \underline{3}$ $y = \underline{-2}$

係数 -6 の半分は -3 、2乗すると 9 。

$$y = x^2 - 6x + 9 - 9 + 7 = (x - 3)^2 - 2$$

頂点は $(3, -2)$

3

定数項が負

$y = x^2 + 2x - 5$ を平方完成し、頂点の座標を求めよ。

頂点 $x = \underline{-1}$ $y = \underline{-6}$

係数 2 の半分は 1 、2乗すると 1 。

$$y = x^2 + 2x + 1 - 1 - 5 = (x + 1)^2 - 6$$

頂点は $(-1, -6)$

4

xの係数が負・絶対値が大きめ

$y = x^2 - 8x + 10$ を平方完成し、頂点の座標を求めよ。

頂点 $x = \underline{4}$ $y = \underline{-6}$

係数 -8 の半分は -4 、2乗すると 16 。

$$y = x^2 - 8x + 16 - 16 + 10 = (x - 4)^2 - 6$$

頂点は $(4, -6)$

5

xの係数が大きい

$y = x^2 + 10x + 21$ を平方完成し、頂点の座標を求めよ。

頂点 $x = \underline{-5}$ $y = \underline{-4}$

係数 10 の半分は 5、2乗すると 25。

$$y = x^2 + 10x + 25 - 25 + 21 = (x + 5)^2 - 4$$

頂点は $(-5, -4)$

6

定数項が負・xの係数が負

$y = x^2 - 2x - 8$ を平方完成し、頂点の座標を求めよ。

頂点 $x = \underline{1}$ $y = \underline{-9}$

係数 -2 の半分は -1 、2乗すると 1。

$$y = x^2 - 2x + 1 - 1 - 8 = (x - 1)^2 - 9$$

頂点は $(1, -9)$

7

xの係数が正・絶対値が大きめ

$y = x^2 + 8x + 5$ を平方完成し、頂点の座標を求めよ。

頂点 $x = \underline{-4}$ $y = \underline{-11}$

係数 8 の半分は 4、2乗すると 16。

$$y = x^2 + 8x + 16 - 16 + 5 = (x + 4)^2 - 11$$

頂点は $(-4, -11)$

8

xの係数が負・絶対値が大きめ

 $y = x^2 - 10x + 20$ を平方完成し、頂点の座標を求めよ。頂点 $x = \underline{5}$ $y = \underline{-5}$ 係数 -10 の半分は -5 、2乗すると 25 。

$$y = x^2 - 10x + 25 - 25 + 20 = (x - 5)^2 - 5$$

頂点は $(5, -5)$ 標準 (9~16) ※ a が1でない式を含む9 $y = 2x^2 - 4x + 7$ を平方完成し、頂点の座標を求めよ。頂点 $x = \underline{1}$ $y = \underline{5}$

$$y = 2(x^2 - 2x) + 7 = 2(x^2 - 2x + 1 - 1) + 7 = 2(x - 1)^2 - 2 + 7 = 2(x - 1)^2 + 5$$

頂点は $(1, 5)$ 10 $y = -x^2 + 4x - 1$ を平方完成し、頂点の座標を求めよ。頂点 $x = \underline{2}$ $y = \underline{3}$

$$y = -(x^2 - 4x) - 1 = -(x^2 - 4x + 4 - 4) - 1 = -((x - 2)^2 - 4) - 1 = -(x - 2)^2 + 4 - 1 = -(x - 2)^2 + 3$$

頂点は $(2, 3)$

11 $y = -2x^2 - 8x - 5$ を平方完成し、頂点の座標を求めよ。

頂点 $x = \underline{-2}$ $y = \underline{3}$

$$y = -2(x^2 + 4x) - 5 = -2(x^2 + 4x + 4 - 4) - 5 = -2((x + 2)^2 - 4) - 5 = -2(x + 2)^2 + 8 - 5 = -2(x + 2)^2 + 3$$

頂点は $(-2, 3)$

12 $y = 3x^2 - 6x + 4$ を平方完成し、頂点の座標を求めよ。

頂点 $x = \underline{1}$ $y = \underline{1}$

$$y = 3(x^2 - 2x) + 4 = 3(x^2 - 2x + 1 - 1) + 4 = 3(x - 1)^2 - 3 + 4 = 3(x - 1)^2 + 1$$

頂点は $(1, 1)$

13 $y = 2x^2 + 12x + 13$ を平方完成し、頂点の座標を求めよ。

頂点 $x = \underline{-3}$ $y = \underline{-5}$

$$y = 2(x^2 + 6x) + 13 = 2(x^2 + 6x + 9 - 9) + 13 = 2(x + 3)^2 - 18 + 13 = 2(x + 3)^2 - 5$$

頂点は $(-3, -5)$

14 $y = -3x^2 + 12x - 7$ を平方完成し、頂点の座標を求めよ。

頂点 $x = \underline{2}$ $y = \underline{5}$

$$y = -3(x^2 - 4x) - 7 = -3(x^2 - 4x + 4 - 4) - 7 = -3((x - 2)^2 - 4) - 7 = -3(x - 2)^2 + 12 - 7 = -3(x - 2)^2 + 5$$

頂点は $(2, 5)$

15 $y = -x^2 - 2x + 4$ を平方完成し、頂点の座標を求めよ。

頂点 $x = \underline{-1}$ $y = \underline{5}$

$$y = -(x^2 + 2x) + 4 = -(x^2 + 2x + 1 - 1) + 4 = -((x + 1)^2 - 1) + 4 = -(x + 1)^2 + 1 + 4 = -(x + 1)^2 + 5$$

頂点は $(-1, 5)$

16 a、頂点の x 、 y の3つを答える

$y = 2x^2 - 12x + 19$ を $y = a(x - p)^2 + q$ の形に平方完成し、 $a \cdot$ 頂点の x 座標 $\cdot y$ 座標を求めよ。

$a = \underline{2}$ 頂点 $x = \underline{3}$ $y = \underline{1}$

$$y = 2(x^2 - 6x) + 19 = 2(x^2 - 6x + 9 - 9) + 19 = 2(x - 3)^2 - 18 + 19 = 2(x - 3)^2 + 1$$

$a = 2$ 、頂点は $(3, 1)$

挑戦 (17~20)

17 aが分数

$y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$ を平方完成し、頂点の座標を求めよ。

頂点 $x = \underline{3}$ $y = \underline{-7/2}$

$$y = \frac{1}{2}(x^2 - 6x) + 1 = \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 9 - 9) + 1 = \frac{1}{2}((x - 3)^2 - 9) + 1 = \frac{1}{2}(x - 3)^2 - \frac{9}{2} + \frac{2}{2} = \frac{1}{2}(x - 3)^2 - \frac{7}{2}$$

頂点は $\left(3, -\frac{7}{2}\right)$

18

xの係数が奇数

$y = x^2 + 3x + 1$ を平方完成し、頂点の座標を求めよ。

頂点 $x = \underline{-3/2}$ $y = \underline{-5/4}$

係数 3 の半分は $\frac{3}{2}$ 、2乗すると $\frac{9}{4}$ 。

$$y = x^2 + 3x + 1 = \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 1 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{4}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

頂点は $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right)$

19

aが1でなく、xの係数も分数になる

$y = 2x^2 + 3x - 1$ を平方完成し、頂点の座標を求めよ。

頂点 $x = \underline{-3/4}$ $y = \underline{-17/8}$

$y = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x\right) - 1$ カッコの中の係数 $\frac{3}{2}$ の半分は $\frac{3}{4}$ 、2乗すると $\frac{9}{16}$ 。

$$y = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16}\right) - 1 = 2\left(\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right) - 1 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{8} - \frac{8}{8} = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{17}{8}$$

頂点は $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{17}{8}\right)$

$y = -x^2 + 5x - 3$ を平方完成し、頂点の座標を求めよ。

頂点 $x = \underline{5/2}$ $y = \underline{13/4}$

$y = -(x^2 - 5x) - 3$ カッコの中の係数 -5 の半分は $-\frac{5}{2}$ 、2乗すると $\frac{25}{4}$ 。

$$\begin{aligned} y &= -\left(x^2 - 5x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4}\right) - 3 = -\left(\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right) - 3 = \\ &= -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} - \frac{12}{4} = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{13}{4} \end{aligned}$$

頂点は $\left(\frac{5}{2}, \frac{13}{4}\right)$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。教科書章末～入試基礎レベルに挑戦しよう。

応1

小数の係数

$y = 0.1x^2 - x + 3$ を平方完成し、頂点の座標を求めよ。

頂点 $x = \underline{5}$ $y = \underline{1/2}$

x^2 の係数が $0.1 (= \frac{1}{10})$ なので、まず x^2 と x の項を 0.1 でくくる。

$$y = 0.1(x^2 - 10x) + 3$$

カッコの中の x の係数 -10 の半分は -5 、2乗すると 25 。カッコの中で 25 を足して引く。

$$y = 0.1(x^2 - 10x + 25 - 25) + 3$$

$$= 0.1((x - 5)^2 - 25) + 3$$

カッコの外の 0.1 を分配する。

$$= 0.1(x - 5)^2 - 2.5 + 3$$

$$= 0.1(x - 5)^2 + 0.5$$

頂点は $(5, 0.5)$

応2

小数の定数項×分数になるxの係数

$y = 2x^2 - 3x + 0.5$ を平方完成し、頂点の座標を求めよ。

頂点 $x = \underline{3/4}$ $y = \underline{-5/8}$

x^2 の係数 2 で、まず x^2 と x の項をくくる。

$$y = 2(x^2 - 1.5x) + 0.5$$

カッコの中の x の係数 -1.5 ($= -\frac{3}{2}$) の半分は -0.75 ($= -\frac{3}{4}$)、2乗すると

0.5625 ($= \frac{9}{16}$)。カッコの中でこの数を足して引く。

$$y = 2(x^2 - 1.5x + 0.5625 - 0.5625) + 0.5$$

$$= 2((x - 0.75)^2 - 0.5625) + 0.5$$

カッコの外の 2 を分配する。

$$= 2(x - 0.75)^2 - 1.125 + 0.5$$

$$= 2(x - 0.75)^2 - 0.625$$

$$\text{頂点は } (0.75, -0.625) = \left(\frac{3}{4}, -\frac{5}{8}\right)$$

応3

文字係数 (パラメータ) を含む式

k を実数の定数とする。2次関数 $y = x^2 + 2kx + 3$ を平方完成し、 y の最小値を k を用いて表せ。また、そのときの x の値も k を用いて表せ。(式が答えなので入力欄はなし。解説で確認しよう)

x の係数 $2k$ の半分は k 、2乗すると k^2 。これを足して引く。

$$y = x^2 + 2kx + k^2 - k^2 + 3$$

$$= (x + k)^2 - k^2 + 3$$

x^2 の係数は 1 (正) なので、このグラフは下に凸。よって頂点で y は最小値をとる。

頂点の x 座標は $-k$ 、 y 座標は $3 - k^2$ 。

$x = -k$ のとき最小値 $3 - k^2$ をとる

$x + y = 10$ を満たす実数 x, y について、 $x^2 + y^2$ の最小値を求めよ。またそのときの x の値を求めよ（対称性より y も同じ値になる）。

最小値 50 そのときの $x =$ 5

$x + y = 10$ より $y = 10 - x$ 。これを $x^2 + y^2$ に代入し、1文字の式にする。

$$x^2 + y^2 = x^2 + (10 - x)^2$$

$$= x^2 + 100 - 20x + x^2$$

$$= 2x^2 - 20x + 100$$

x^2 と x の項を2でくくる。

$$= 2(x^2 - 10x) + 100$$

x の係数 -10 の半分は -5 、2乗すると 25 。カッコの中で足して引く。

$$= 2(x^2 - 10x + 25 - 25) + 100$$

$$= 2((x - 5)^2 - 25) + 100$$

$$= 2(x - 5)^2 - 50 + 100$$

$$= 2(x - 5)^2 + 50$$

x^2 の係数 2 は正なので下に凸。よって $x = 5$ のとき最小値 50 をとる。このとき $y = 10 - 5 = 5$ 。

$x = 5, y = 5$ のとき最小値 50

周の長さが **24 cm** の長方形がある。縦の長さを x cm（ただし $0 < x < 12$ ）として、面積 S を x の式で表し、平方完成して S の最大値を求めよ。またそのときの縦の長さを求めよ。

面積の最大値 **36** cm^2 縦の長さ **6** cm

縦の長さが x cm のとき、周の長さが **24 cm** なので、縦 + 横 = 12、よって横の長さは $12 - x$ cm。面積 S を x の式にする。

$$S = x(12 - x)$$

$$= -x^2 + 12x$$

x^2 の項をまとめるため -1 でくくる。

$$= -(x^2 - 12x)$$

x の係数 -12 の半分は -6 、2乗すると **36**。カッコの中で足して引く。

$$= -(x^2 - 12x + 36 - 36)$$

$$= -((x - 6)^2 - 36)$$

$$= -(x - 6)^2 + 36$$

x^2 の係数が負なので上に凸。よって $x = 6$ のとき最大値 **36** をとる。このとき横の長さは $12 - 6 = 6$ 、つまり縦・横ともに **6 cm** の正方形になる。

縦 6 cm ・ 横 6 cm の正方形のとき最大値 36 cm^2