

2次関数とグラフ・平行移動

解答（全23問）

氏名 _____

得点 _____ / 23点

DRILL

練習問題（全18問）

基本（1～7）

1

頂点形から直接読み取る

$y = (x - 3)^2 + 2$ の頂点を求めよ。

頂点のx座標 3 頂点のy座標 2

$y = a(x - p)^2 + q$ の形とみると $p = 3, q = 2$ 。

頂点 (3, 2)

2

符号のワナ（+の形）

$y = (x + 5)^2 - 1$ の頂点を求めよ。

頂点のx座標 -5 頂点のy座標 -1

$(x + 5)^2$ は $(x - (-5))^2$ と同じ形なので $p = -5, q = -1$ 。

頂点 (-5, -1)

3

aが1でなくても頂点は同じ考え方

 $y = 3(x - 2)^2 + 4$ の頂点を求めよ。頂点のx座標 2 頂点のy座標 4 $a = 3$ は頂点の位置に影響しない。 $p = 2, q = 4$ 。

頂点 (2, 4)

4

上に凸でも頂点の読み方は同じ

 $y = -(x - 6)^2 - 3$ の頂点を求めよ。頂点のx座標 6 頂点のy座標 -3 $a = -1, p = 6, q = -3$ 。頂点の位置は a の符号に関係なく (p, q) 。

頂点 (6, -3)

5

q=0のケース

 $y = (x + 1)^2$ の頂点を求めよ。頂点のx座標 -1 頂点のy座標 0 $y = (x + 1)^2$ は $y = (x - (-1))^2 + 0$ と同じ。 $p = -1, q = 0$ 。

頂点 (-1, 0)

6

 $|a|$ が大きいほど細い

$y = x^2$ 、 $y = \frac{2}{5}x^2$ 、 $y = 6x^2$ のうち、グラフが最も細い（急な）ものはどれか。
その a の値を答えよ。

$a =$ 6

$|a|$ が大きいほどグラフは細く急になる。 $|1| = 1$, $\left|\frac{2}{5}\right| = 0.4$, $|6| = 6$ なので最大は 6。

$a = 6$ のグラフが最も細い

7

 $|a|$ が小さいほど平べったい

$y = -4x^2$ 、 $y = \frac{1}{3}x^2$ 、 $y = -x^2$ のうち、グラフが最も平べったい（開いた）ものはどれか。その a の値を答えよ。

$a =$ 1/3

$|a|$ が小さいほどグラフは平べったく広がる。 $|-4| = 4$, $\left|\frac{1}{3}\right| = 0.333\dots$, $|-1| = 1$ なので最小は $\frac{1}{3}$ 。

$a = \frac{1}{3}$ のグラフが最も平べったい

標準 (8~14)

- 8 $y = 2x^2$ を x 軸方向に 3、 y 軸方向に -1 だけ平行移動してできる関数の頂点を求めよ。

頂点のx座標 3 頂点のy座標 -1

$y = 2x^2$ の頂点は $(0, 0)$ 。 x 軸方向に 3、 y 軸方向に -1 動かすと、頂点も同じだけ動く。

移動後の頂点は $(0 + 3, 0 - 1) = (3, -1)$ 。(移動後の式は $y = 2(x - 3)^2 - 1$)

頂点 $(3, -1)$

- 9 移動前後の対応点

問題8の移動後の関数 $y = 2(x - 3)^2 - 1$ 上の点 $(3, -1)$ は、もとの関数 $y = 2x^2$ 上のどの点に対応するか。

対応する点のx座標 0 y座標 0

平行移動は、もとのグラフ上のすべての点を同じ量だけずらす操作。

移動後の点 $(3, -1)$ は、 x 軸方向に 3、 y 軸方向に -1 動かした結果なので、逆にもとに戻すには x 方向に -3 、 y 方向に $+1$ 動かせばよい。

$(3 - 3, -1 + 1) = (0, 0)$ 。実際 $y = 2x^2$ の頂点も $(0, 0)$ なので一致する。

もとの関数上の点 $(0, 0)$

- 10 $y = -(x + 1)^2 + 4$ の軸を求めよ。

軸 $x =$ -1

$(x + 1)^2 = (x - (-1))^2$ なので $p = -1$ 。軸は $x = p$ 。

軸 $x = -1$

11 $y = -(x + 1)^2 + 4$ の頂点を求めよ。

頂点のx座標 -1 頂点のy座標 4

$p = -1, q = 4$ なので頂点は $(p, q) = (-1, 4)$ 。

頂点 $(-1, 4)$

12

x軸対称移動

$y = (x - 2)^2 + 3$ を x 軸に関して対称移動してできる関数の頂点を求めよ。

頂点のx座標 2 頂点のy座標 -3

x 軸対称は $y \rightarrow -y$ 。もとの式 $y = (x - 2)^2 + 3$ の y を $-y$ に置きかえて
 $-y = (x - 2)^2 + 3 \rightarrow y = -(x - 2)^2 - 3$

頂点は x 座標そのまま、 y 座標だけ符号が反転して $(2, -3)$ 。

頂点 $(2, -3)$

13

y軸対称移動

$y = (x - 2)^2 + 3$ を y 軸に関して対称移動してできる関数の頂点を求めよ。

頂点のx座標 -2 頂点のy座標 3

y 軸対称は $x \rightarrow -x$ 。もとの式の x を $-x$ に置きかえて

$y = (-x - 2)^2 + 3 = (x + 2)^2 + 3$ ($(-x - 2)^2 = (-(x + 2))^2 = (x + 2)^2$)

頂点は y 座標そのまま、 x 座標だけ符号が反転して $(-2, 3)$ 。

頂点 $(-2, 3)$

14

原点对称移動

$y = (x - 2)^2 + 3$ を原点に関して対称移動してできる関数の頂点を求めよ。

頂点のx座標 -2 頂点のy座標 -3

原点对称は $x \rightarrow -x$ と $y \rightarrow -y$ を同時に行う。もとの式に代入して
 $-y = (-x - 2)^2 + 3 = (x + 2)^2 + 3 \rightarrow y = -(x + 2)^2 - 3$
頂点は x, y 座標ともに符号が反転して $(-2, -3)$ 。

頂点 $(-2, -3)$

挑戦 (15~18)

15

2回の移動の合成

$y = x^2$ を x 軸方向に 2、 y 軸方向に 5 だけ平行移動し、さらにその関数を x 軸方向に -4、 y 軸方向に -3 だけ平行移動した。最終的な頂点を求めよ。

頂点のx座標 -2 頂点のy座標 2

2回の平行移動は、移動量をそれぞれ足し合わせた1回の移動と同じ結果になる。
 x 方向の合計： $2 + (-4) = -2$
 y 方向の合計： $5 + (-3) = 2$
もとの頂点 $(0, 0)$ をこの分だけ動かすと $(0 - 2, 0 + 2) = (-2, 2)$ 。

頂点 $(-2, 2)$

16

 $y = x^2$ に重なる移動量

$y = (x - 4)^2 + 7$ を x 軸方向に a 、 y 軸方向に b だけ平行移動すると $y = x^2$ に重なった。 a 、 b の値を求めよ。

$$a = \underline{-4} \quad b = \underline{-7}$$

$y = (x - 4)^2 + 7$ の頂点は $(4, 7)$ 。 $y = x^2$ の頂点は $(0, 0)$ 。

移動後に頂点が $(0, 0)$ になればよいので

$$4 + a = 0 \Rightarrow a = -4$$

$$7 + b = 0 \Rightarrow b = -7$$

$$a = -4, b = -7$$

17

対称移動後の頂点のy座標のみ

$y = 2(x + 3)^2 - 5$ を x 軸に関して対称移動してできる関数の、頂点の y 座標を求めよ。

頂点のy座標 $\underline{5}$

もとの頂点は $(-3, -5)$ 。 x 軸対称は $y \rightarrow -y$ なので、 x 座標は変わらず y 座標だけ符号が反転する。

$$-(-5) = 5$$

頂点のy座標は 5 (頂点は $(-3, 5)$)

2次関数 $y = (x - p)^2 + q$ を原点に関して対称移動したところ、頂点が $(-2, -6)$ になった。 p, q の値を求めよ。

$$p = \underline{2} \quad q = \underline{6}$$

もとの頂点は (p, q) 。原点对称移動では頂点が $(-p, -q)$ に移る。

これが $(-2, -6)$ と等しいので

$$-p = -2 \Rightarrow p = 2$$

$$-q = -6 \Rightarrow q = 6$$

$$p = 2, q = 6$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

平行移動と対称移動の合成

$y = 2x^2$ を、まず x 軸方向に -1 、 y 軸方向に 3 だけ平行移動し、その関数をさらに x 軸に関して対称移動する。最終的にできる関数の頂点を求めよ。

頂点の x 座標 -1 頂点の y 座標 -3

まず平行移動だけを考える。 $y = 2x^2$ の頂点 $(0, 0)$ を x 軸方向に -1 、 y 軸方向に 3 動かすと、頂点は $(0 - 1, 0 + 3) = (-1, 3)$ になる（このときの式は $y = 2(x + 1)^2 + 3$ ）。

次にこの関数を x 軸に関して対称移動する。 x 軸対称は $y \rightarrow -y$ で、頂点の x 座標はそのまま、 y 座標だけ符号が反転する。
よって頂点は $(-1, -3)$ になる。

頂点 $(-1, -3)$

応2

平行移動で重なるための移動量

$y = 3(x - 1)^2 + 5$ のグラフを平行移動して $y = 3(x + 2)^2 - 4$ のグラフに重ねたい。 x 軸方向・ y 軸方向にそれぞれいくつ平行移動すればよいか求めよ。

x 軸方向 -3 y 軸方向 -9

平行移動は a (x^2 の係数) の値を変えないので、まず両方とも $a = 3$ であることを確認する。同じ a どうしなら、頂点を頂点へ移す平行移動でグラフ全体をぴったり重ねられる。

$y = 3(x - 1)^2 + 5$ の頂点は $(1, 5)$ 。

$y = 3(x + 2)^2 - 4$ の頂点は $(-2, -4)$ 。

頂点 $(1, 5)$ を頂点 $(-2, -4)$ に移す移動量を求めればよいので

x 軸方向： $-2 - 1 = -3$

y 軸方向： $-4 - 5 = -9$

x 軸方向に -3 、 y 軸方向に -9

応3

平行移動だけでは重ならない場合

$y = 2(x - 3)^2 + 1$ のグラフと $y = -2(x - 3)^2 + 1$ のグラフは、平行移動だけで重ねることができるか。理由とともに答えよ。

平行移動はグラフの形（開き方や幅）を変えず、位置だけをずらす操作である。グラフの形を決めるのは a の値であり、平行移動をしても a の値は変化しない。

$y = 2(x - 3)^2 + 1$ は $a = 2$ で下に凸（口が上向き）。

$y = -2(x - 3)^2 + 1$ は $a = -2$ で上に凸（口が下向き）。

$|a|$ は等しく形の細さ・広がりと同じだが、 a の符号が異なるため開いている向きが逆である。平行移動だけでは開いている向きを変えられないので、この2つは平行移動だけでは重ならない。重ねるには x 軸に関する対称移動（または 180° の回転に相当する操作）が別に必要になる。

重ならない (a の符号が逆で開く向きが異なるため。重ねるには対称移動が必要)

t を実数の定数とし、2次関数 $y = (x - t)^2 + 2t - 1$ のグラフを考える。 t の値をいろいろに変えるとき、このグラフの頂点は、あるひとつの直線上を動く。その直線の式を $y = ax + b$ の形 (x, y は座標平面上の変数、 t はパラメータ) で求めよ。

傾き $a = \underline{2}$ 切片 $b = \underline{-1}$

$y = (x - t)^2 + (2t - 1)$ は $y = a(x - p)^2 + q$ の形で $p = t, q = 2t - 1$ にあたる。つまり頂点は

$$(p, q) = (t, 2t - 1)$$

頂点の x 座標を x 、 y 座標を y と書くと

$$x = t, y = 2t - 1$$

1つ目の式から $t = x$ なので、これを2つ目の式に代入してパラメータ t を消去すると

$$y = 2x - 1$$

これが頂点の軌跡（頂点が動いてできる直線）の式である。 t を動かすたびに頂点はこの直線上のどこかの点になる。

頂点の軌跡は $y = 2x - 1$ ($a = 2, b = -1$)

$y = (x - 2)^2 + 3$ のグラフに対して、操作T (x 軸方向に 5 だけ平行移動) と操作M (y 軸に関して対称移動) を考える。次の(A)(B)それぞれの順序で操作をしたとき、最終的な頂点を求めよ。

(A) 先にT、その後にMを行う。

(B) 先にM、その後にTを行う。

(A)の頂点：x座標 -7 y座標 3

(B)の頂点：x座標 3 y座標 3

もとの頂点は $(2, 3)$ 。

(A) 先にTを行う： x 軸方向に 5 動かすと $(2 + 5, 3) = (7, 3)$ 。

次にMを行う： y 軸対称は $x \rightarrow -x$ なので $(7, 3) \rightarrow (-7, 3)$ 。

よって(A)の頂点は $(-7, 3)$ 。

(B) 先にMを行う： y 軸対称で $(2, 3) \rightarrow (-2, 3)$ 。

次にTを行う： x 軸方向に 5 動かすと $(-2 + 5, 3) = (3, 3)$ 。

よって(B)の頂点は $(3, 3)$ 。

(A)は $(-7, 3)$ 、(B)は $(3, 3)$ で一致しない。平行移動と対称移動は、順序を入れかえると結果が変わることがある（操作の順序は自由に交換できない）。

(A)の頂点 $(-7, 3)$ 、(B)の頂点 $(3, 3)$ (順序を変えると結果が変わる)