

2次関数 まとめ

解答（全27問）

氏名 _____

得点 _____ / 27点

DRILL

まとめテスト（標準）

基本（1～15）

1

平行移動

$y = x^2$ を x 軸方向に -3 、 y 軸方向に 5 だけ平行移動してできる関数の頂点の座標を求めよ。

頂点のx座標 -3 頂点のy座標 5

平行移動は、頂点をそのまま同じ量だけ動かす操作。 $y = x^2$ の頂点 $(0, 0)$ を x 軸方向に -3 、 y 軸方向に 5 動かすと

$$(0 - 3, 0 + 5) = (-3, 5)$$

$$(\text{移動後の式は } y = (x + 3)^2 + 5)$$

頂点 $(-3, 5)$

2

頂点形から直接読み取る

$y = -3(x + 4)^2 - 7$ の頂点の座標を求めよ。

頂点のx座標 -4 頂点のy座標 -7

$y = a(x - p)^2 + q$ の形とみると、 $(x + 4)^2 = (x - (-4))^2$ なので $p = -4$ 。 $a = -3$, $q = -7$ 。

頂点の位置は a の符号に関係なく (p, q) 。

頂点 $(-4, -7)$

3

平方完成 ($a=1$)

$y = x^2 - 10x + 18$ を平方完成し、頂点の座標を求めよ。

頂点のx座標 5 頂点のy座標 -7

x の係数 -10 の半分は -5 、2乗すると 25 。

$$y = x^2 - 10x + 25 - 25 + 18 = (x - 5)^2 - 7$$

頂点 $(5, -7)$

4

平方完成 ($a \neq 1$ でない)

$y = 3x^2 + 12x + 7$ を平方完成し、頂点の座標を求めよ。

頂点のx座標 -2 頂点のy座標 -5

x^2 と x の項を 3 でくくる。

$$y = 3(x^2 + 4x) + 7$$

カッコの中の係数 4 の半分は 2 、2乗すると 4 。

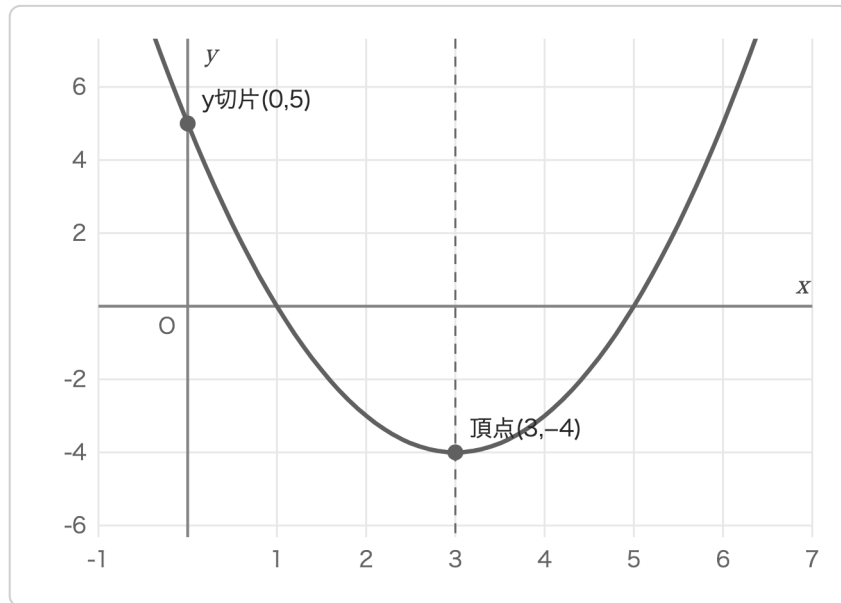
$$y = 3(x^2 + 4x + 4 - 4) + 7 = 3((x + 2)^2 - 4) + 7 = 3(x + 2)^2 - 12 + 7 = 3(x + 2)^2 - 5$$

頂点 $(-2, -5)$

5

頂点・軸・y切片

$y = x^2 - 6x + 5$ の頂点の座標・軸・y切片を求めよ。



頂点のx座標 3 頂点のy座標 -4 軸 $x =$ 3 y切片 5

$$y = x^2 - 6x + 5 = (x - 3)^2 - 9 + 5 = (x - 3)^2 - 4$$

頂点は $(3, -4)$ 、軸は $x = 3$ 。

$x = 0$ を代入すると $y = 5$ 。

頂点 $(3, -4)$ 、軸 $x = 3$ 、y切片5

6

最大値・最小値（区間指定なし）

$y = -x^2 + 6x - 4$ の最大値を求めよ。

最大値 5 そのとき $x =$ 3

$$y = -(x^2 - 6x) - 4 = -((x - 3)^2 - 9) - 4 = -(x - 3)^2 + 9 - 4 = -(x - 3)^2 + 5$$

上に凸なので頂点が最大。

$x = 3$ のとき最大値5（最小値はない）

7

パターンA：軸が区間の中

$y = x^2 - 4x + 2$ ($0 \leq x \leq 5$) の最大値・最小値を求めよ。

最大値 7 ($x = \underline{5}$) 最小値 -2 ($x = \underline{2}$)

$y = (x - 2)^2 - 2$ 軸 $x = 2$ は区間 $[0, 5]$ の中。

$x = 0 \rightarrow 2$ $x = 2 \rightarrow -2$ (頂点) $x = 5 \rightarrow 7$

軸からの距離は $x = 0$ が 2、 $x = 5$ が 3。遠い方の $x = 5$ が最大。

$x = 5$ で最大値 7、 $x = 2$ で最小値 -2

8

パターンB：軸が区間の外

$y = x^2 - 2x - 3$ ($3 \leq x \leq 6$) の最大値・最小値を求めよ。

最大値 21 ($x = \underline{6}$) 最小値 0 ($x = \underline{3}$)

$y = (x - 1)^2 - 4$ 軸 $x = 1$ は区間 $[3, 6]$ より左側 $\rightarrow$ 区間内はずっと増加。

$x = 3 \rightarrow 0$ $x = 6 \rightarrow 21$

$x = 6$ で最大値 21、 $x = 3$ で最小値 0

9

因数分解で解く

$x^2 - 3x - 10 = 0$ を解け。

$x = \underline{5, -2}$

積が -10、和が -3 になる 2 数は -5 と 2。

$(x - 5)(x + 2) = 0$

$x = 5, -2$

10

解の公式 (√が残る)

$x^2 - 2x - 4 = 0$ を解の公式で解け。

$$x = \underline{1+\sqrt{5}, 1-\sqrt{5}}$$

$$a = 1, b = -2, c = -4 \quad b' = -1$$

$$b'^2 - ac = (-1)^2 - 1 \cdot (-4) = 1 + 4 = 5$$

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{5}}{a} = 1 \pm \sqrt{5}$$

$$x = 1 + \sqrt{5}, 1 - \sqrt{5}$$

11

判別式Dと実数解の個数

$2x^2 - 5x + 1 = 0$ について、判別式 D の値と実数解の個数を求めよ。

$$D = \underline{17} \quad \text{個数} \quad \underline{2} \quad \text{個}$$

$$a = 2, b = -5, c = 1$$

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 25 - 8 = 17 \quad D > 0 \text{なので実数解は2個。}$$

$$D = 17、\text{実数解は2個}$$

12

2次不等式 (外側型)

$x^2 - 7x + 10 > 0$ を解け。解は $x < \text{ア}$ または $\text{イ} < x$ の形になる。

$$\text{ア} = \underline{2} \quad \text{イ} = \underline{5}$$

積が10、和が-7になる2数は-2と-5。

$x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5)$ 。交点は $x = 2, 5$ 。 $y > 0$ なので外側型。

$$x < 2 \text{ または } 5 < x$$

13

2次不等式（内側型）

$x^2 - x - 12 < 0$ を解け。解は $\text{ウ} < x < \text{エ}$ の形になる。

$$\text{ウ} = \underline{-3} \quad \text{エ} = \underline{4}$$

積が -12 、和が -1 になる2数は 3 と -4 。

$x^2 - x - 12 = (x + 3)(x - 4)$ 。交点は $x = -3, 4$ 。 $y < 0$ なので内側型。

$$-3 < x < 4$$

14

2次関数の決定（頂点形）

頂点が $(3, -2)$ で、点 $(5, 6)$ を通る放物線を $y = a(x - 3)^2 - 2$ の形で表すとき、 a の値を求めよ。

$$a = \underline{2}$$

頂点が $(3, -2)$ なので $y = a(x - 3)^2 - 2$ とおける。

点 $(5, 6)$ を代入： $6 = a(5 - 3)^2 - 2 = 4a - 2$

$$4a = 8 \quad a = 2$$

$$a = 2 \text{ (式は } y = 2(x - 3)^2 - 2 \text{)}$$

15

2次関数の決定（因数分解形）

放物線が x 軸と点 $(-2, 0)$ 、 $(3, 0)$ で交わり、点 $(0, -12)$ を通るとき、これを展開して $y = ax^2 + bx + c$ の形にしたときの a, b, c の値を求めよ。

$$a = \underline{2} \quad b = \underline{-2} \quad c = \underline{-12}$$

x 軸との交点が $(-2, 0)$ 、 $(3, 0)$ なので $y = a(x + 2)(x - 3)$ とおける。

点 $(0, -12)$ を代入： $-12 = a(0 + 2)(0 - 3) = a \times 2 \times (-3) = -6a$

$$a = 2$$

展開すると $y = 2(x + 2)(x - 3) = 2(x^2 - x - 6) = 2x^2 - 2x - 12$

$$a = 2, b = -2, c = -12$$

発展 (16~25)

16

軸が動く型 (具体値)

$y = x^2 - 2ax + 5$ ($0 \leq x \leq 4$) について、 $a = 5$ のときの最小値を求めよ。

最小値 -19 そのとき $x =$ 4

$y = x^2 - 2ax + 5 = (x - a)^2 + 5 - a^2$ 、軸は $x = a$ 。 $a = 5$ のとき軸 $x = 5$ は区間 $[0, 4]$ より右側 → 区間内はずっと減少。

最小は右端 $x = 4$ 。 $y = 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 + 5 = 16 - 40 + 5 = -19$ 。

$x = 4$ のとき最小値-19

17

判別式から k の範囲

$x^2 + 6x + k = 0$ が実数解をもつような k の値の範囲を求めよ。

$k \leq$ 9

実数解をもつ (重解も含む) $\iff D \geq 0$

$$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot k = 36 - 4k$$

$36 - 4k \geq 0$ より $4k \leq 36$ 、よって $k \leq 9$

$k \leq 9$

2次方程式 $x^2 - 3x - 1 = 0$ の2つの解を α, β とする。解を求めずに、解と係数の関係を用いて $\alpha^2 + \beta^2$ の値を求めよ。

$$\alpha^2 + \beta^2 = \underline{\underline{11}}$$

$a = 1, b = -3, c = -1$ なので、解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -\frac{-3}{1} = 3, \alpha\beta = \frac{-1}{1} = -1$$

$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ を変形すると

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 3^2 - 2 \times (-1) = 9 + 2 = 11$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 11$$

連立不等式 $x^2 - x - 6 < 0$ かつ $x^2 - 5x + 4 \geq 0$ を解け。共通範囲の下端・上端を入力せよ（不等号の等号の有無はdetailsで確認）。

$$\text{下端} = \underline{\underline{-2}} \quad \text{上端} = \underline{\underline{1}}$$

1つ目： $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$ 。交点 $x = -2, 3$ 。 $y < 0$ なので内側型 $\rightarrow -2 < x < 3$ 。

2つ目： $x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$ 。交点 $x = 1, 4$ 。 $y \geq 0$ （等号つき）なので境界を含む外側型 $\rightarrow x \leq 1$ または $4 \leq x$ 。

共通部分を数直線で確認する。 $-2 < x < 3$ のうち、 $x \leq 1$ の部分だけが2つ目の条件も満たす（ $x \geq 4$ の部分は $-2 < x < 3$ からはみ出るので使えない）。 $x = 1$ 自体は2つ目の条件（ $x \leq 1$ ）を満たすので含む。

$$-2 < x \leq 1$$

周の長さが28cmの長方形がある。縦の長さを x cm ($0 < x < 14$) として、面積を S cm²とすると $S = -x^2 + 14x$ と表せる。面積が45cm²以上になるような x の範囲を求めよ。

下端 = 5 上端 = 9

条件は $S \geq 45$ なので

$$-x^2 + 14x \geq 45$$

$$-x^2 + 14x - 45 \geq 0$$

両辺に -1 を掛けると（不等号が反転）

$$x^2 - 14x + 45 \leq 0$$

左辺を因数分解する。積が45・和が -14 になる2数は -5 と -9 なので

$$x^2 - 14x + 45 = (x - 5)(x - 9)$$

交点は $x = 5, 9$ 。 $y \leq 0$ （等号つき）なので境界を含む内側型。

条件 $0 < x < 14$ ともつじつまが合う。

$$5 \leq x \leq 9$$

放物線が3点 $(-1, 6)$, $(0, 1)$, $(2, 3)$ を通るとき、 $y = ax^2 + bx + c$ の a, b, c の値を求めよ。

$$a = \underline{2} \quad b = \underline{-3} \quad c = \underline{1}$$

一般形 $y = ax^2 + bx + c$ とおく。

$$(0, 1) : c = 1 \quad \cdots(1)$$

$$(-1, 6) : a - b + c = 6 \quad \cdots(2)$$

$$(2, 3) : 4a + 2b + c = 3 \quad \cdots(3)$$

(1)を(2),(3)に代入して c を消去する。

$$(2) : a - b + 1 = 6 \quad \text{より} \quad a - b = 5 \quad \cdots(2)'$$

$$(3) : 4a + 2b + 1 = 3 \quad \text{より} \quad 4a + 2b = 2, \text{両辺を2で割って} \quad 2a + b = 1 \quad \cdots(3)'$$

$$(2)'+(3)' : (a - b) + (2a + b) = 5 + 1 \quad \text{より} \quad 3a = 6 \quad a = 2$$

$$(3)' \text{に代入} : 4 + b = 1 \quad b = -3$$

すでに $c = 1$ 。

$$a = 2, b = -3, c = 1 \quad (\text{式は} y = 2x^2 - 3x + 1)$$

$y = -x^2 + 2ax - 3$ ($1 \leq x \leq 4$) について、 $a = 0$ のときの最大値を求めよ。

$$\text{最大値} \quad \underline{-4} \quad \text{そのとき} \quad x = \underline{1}$$

$y = -x^2 + 2ax - 3 = -(x - a)^2 + a^2 - 3$ 、軸は $x = a$ 。 $a = 0$ のとき軸 $x = 0$ は区間 $[1, 4]$ より左側にある。

上に凸 (x^2 の係数が負) で軸より右側は単調減少なので、区間 $[1, 4]$ (軸より右) では区間内はずっと減少する。

$$\text{最大は左端} x = 1. \quad y = -1^2 + 2 \cdot 0 \cdot 1 - 3 = -1 - 3 = -4.$$

$$x = 1 \text{のとき最大値} -4$$

放物線 $y = x^2 - 2x + 4$ に接する直線 $y = 2x + k$ の k の値を求めよ。また接点の x 座標を求めよ。

$$k = \underline{0} \quad \text{接点 } x = \underline{2}$$

放物線と直線を連立して y を消去する。

$$x^2 - 2x + 4 = 2x + k$$

$$x^2 - 4x + (4 - k) = 0$$

「接する」とは共有点がちょうど1個、つまりこの2次方程式が重解をもつということ。判別式 $D = 0$ 。

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4 - k) = 16 - 16 + 4k = 4k$$

$$D = 0 \text{より } 4k = 0、\text{よって } k = 0$$

接点の x 座標は重解の値。 $k = 0$ を代入すると方程式は $x^2 - 4x + 4 = 0 \iff (x - 2)^2 = 0$ より $x = 2$ （重解）。

検算： $y = 2 \times 2 + 0 = 4$ 。放物線側でも $y = 2^2 - 2 \times 2 + 4 = 4$ （一致）。

$k = 0$ 、接点は $(2, 4)$

ある商品は1個150円で1日200個売れている。この商品を1円値上げするごとに、1日の販売個数は1個ずつ減るという。値上げ額を x 円（ $0 \leq x \leq 150$ ）とすると、1日の売上金額を30400円以上にするには、値上げ額を何円以上何円以下にすればよいか。

値上げ額は 10 円以上 40 円以下

値上げ後の価格は $150 + x$ 円、販売個数は $200 - x$ 個だから、売上金額 $R(x)$ は

$$\begin{aligned} R(x) &= (150 + x)(200 - x) \\ &= 30000 - 150x + 200x - x^2 \\ &= -x^2 + 50x + 30000 \end{aligned}$$

条件は $R(x) \geq 30400$ なので

$$-x^2 + 50x + 30000 \geq 30400$$

$$-x^2 + 50x - 400 \geq 0$$

両辺を -1 で割ると（不等号が反転）

$$x^2 - 50x + 400 \leq 0$$

左辺を因数分解する。積が400・和が -50 になる2数は -10 と -40 なので

$$x^2 - 50x + 400 = (x - 10)(x - 40)$$

交点は $x = 10, 40$ 。 $y \leq 0$ （等号つき）なので境界を含む内側型。

$$10 \leq x \leq 40 \text{（値上げ額は10円以上40円以下）}$$

すべての実数 x について $x^2 + 2kx + 3k + 10 > 0$ が成り立つように、定数 k の値の範囲を求めよ。

下端 = -2 上端 = 5

左辺を $y = x^2 + 2kx + (3k + 10)$ とみると $a = 1 > 0$ （下に凸）。

下に凸の放物線がすべての x で $y > 0$ になるのは、グラフが x 軸と交わらない、つまり判別式 $D < 0$ のとき（ $D = 0$ だと接する点で $y = 0$ になり「 > 0 」を満たさないので除く）。

$$D = (2k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3k + 10) = 4k^2 - 12k - 40$$

$D < 0$ より $4k^2 - 12k - 40 < 0$ 。両辺を4で割って $k^2 - 3k - 10 < 0$ 。積が -10 ・和が -3 になる2数は -5 と 2 なので $(k - 5)(k + 2) < 0$ 。

これは内側型なので $-2 < k < 5$ （等号は含まない）。

$$-2 < k < 5$$

DRILL

記述チャレンジ

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。模範解答と見比べて、書き方の型を身につけよう。

記1

2次関数の学習は、平方完成によって頂点の座標がわかることを出発点に、グラフの概形、最大値・最小値、2次方程式の解、2次不等式の解までが一本の線でつながっている。なぜ平方完成ができれば、これらすべての問題に対応できるようになるのかを、具体的な式を1つ挙げながら説明せよ。

例として $y = x^2 - 4x + 1$ を考える。平方完成すると

$$y = x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 4 + 1 = (x - 2)^2 - 3$$

となる。この1つの式から、章で学んだすべての内容が導ける。

まずグラフの概形について。頂点は $(2, -3)$ 、軸は $x = 2$ とすぐにわかる。この頂点と軸に、 y 切片 $x = 0 \rightarrow y = 1$ を組み合わせれば、グラフの骨格がそのまま決まる。

最大値・最小値についても同様である。 x^2 の係数が正なので下に凸であり、頂点があるまま最小値になる（区間指定なしなら $x = 2$ のとき最小値 -3 ）。区間が指定される場合も、軸 $x = 2$ と区間の位置関係を比べるだけでよく、平方完成した時点で軸の位置はすでにわかっている。

2次方程式の解も、平方完成した式をそのまま使って求められる。 $(x - 2)^2 - 3 = 0$ とおくと $(x - 2)^2 = 3$ 、よって $x = 2 \pm \sqrt{3}$ となる。これは実質的に解の公式（ b' の公式）と同じ計算であり、平方完成の式がそのまま解の公式の役割を果たしている。

2次不等式も同じ構造で解ける。 $(x - 2)^2 - 3 > 0$ なら $(x - 2)^2 > 3$ となり、これは「頂点からの距離が $\sqrt{3}$ より大きい」という意味なので、 $x < 2 - \sqrt{3}$ または $x > 2 + \sqrt{3}$ とすぐに求まる。判別式の符号（この場合 $b'^2 - ac = 3 > 0$ に相当）で解の個数がわかることも、同じ式から読み取れる。

このように、平方完成した式 $(x - p)^2 + \square$ は「軸 $x = p$ からの距離」という共通の物差しを与えてくれる。グラフの形も、最大最小も、方程式の解も、不等式の解も、すべてこの「軸からの距離」という同じ考え方の上に成り立っているからこそ、平方完成という1つの技術がこの章全体の入口になっている。

平方完成した式 $(x - p)^2 + \square$ は「軸からの距離」という共通の物差しを与える。グラフ・最大最小・方程式・不等式のすべてが、この同じ物差しの上で説明できるため、平方完成が章全体の入口になる。

記2 頂点が $(-1, 4)$ で、点 $(2, -5)$ を通る放物線がある。この放物線の式を求め、求めた式を使って、(1)この関数の最大値、(2)この関数のグラフと x 軸との共有点の個数、(3) $y \leq 0$ となる x の範囲、をそれぞれ求めよ。

まず放物線の式を決定する。頂点が $(-1, 4)$ とわかっているので、頂点形 $y = a(x + 1)^2 + 4$ とおける。

この放物線が点 $(2, -5)$ を通るので、 $x = 2, y = -5$ を代入する。

$$-5 = a(2 + 1)^2 + 4 = 9a + 4$$

$$9a = -9$$

$$a = -1$$

よって式は $y = -(x + 1)^2 + 4$ 。これを展開して一般形に直すと

$$y = -(x^2 + 2x + 1) + 4 = -x^2 - 2x - 1 + 4 = -x^2 - 2x + 3$$

この1つの式を使って、(1)~(3)を求める。

(1) 最大値について。 $a = -1 < 0$ なので上に凸であり、頂点そのまま最大値になる。よって $x = -1$ のとき最大値4（最小値はない）。

(2) x 軸との共有点の個数について。 $y = 0$ とおくと

$$-(x + 1)^2 + 4 = 0$$

$$(x + 1)^2 = 4$$

$$x + 1 = \pm 2$$

$$x = 1 \text{ または } x = -3$$

異なる2つの解が求まったので、共有点の個数は2個である（判別式で考えても、頂点の y 座標4が上に凸のグラフで x 軸より上にあるので、必ず x 軸と2点で交わることが図からもわかる）。

(3) $y \leq 0$ となる x の範囲について。

$$-(x + 1)^2 + 4 \leq 0$$

$$(x + 1)^2 \geq 4$$

$$x + 1 \leq -2 \text{ または } x + 1 \geq 2$$

$$x \leq -3 \text{ または } x \geq 1$$

これは(2)で求めた交点 $x = -3, 1$ の外側にあたる。上に凸のグラフでは、交点の外側でグラフが x 軸より下にあるので、この結果は図のイメージとも一致する。

このように、頂点と1点さえわかれば式が1つに決まり、その式だけで最大値・共有点

の個数・不等式の解のすべてに答えられる。これが2次関数の決定という単元が、この章の最後に置かれている理由である。

放物線の式は $y = -(x + 1)^2 + 4$ ($= -x^2 - 2x + 3$)。 (1) $x = -1$ で最大値4
(2)共有点は2個 ($x = -3, 1$) (3) $x \leq -3$ または $x \geq 1$

EXAM

共通テスト形式チャレンジ

大問1 目標時間 8分／配点 20点

太郎さんは文化祭の模擬店で、オリジナルポーチを1個80円で20個仕入れて売る計画を立てている。値上げの回数を x 回（ x は0以上の整数）とし、1回の値上げにつき、価格が5円上がり、売れる個数が1個減るとする。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

先生「1個あたりの価格と、売れる個数を、まず x を使った式で表してみよう。」

太郎「はい。1個あたりの価格は $(80 + 5x)$ 円、売れる個数は $(20 - x)$ 個になります。」

- (1) 1日の売上金額を S 円とすると、 $S = (80 + 5x)(20 - x)$ である。これを展開して整理し、平方完成すると

$$S = -5(x - \boxed{\text{ア}})^2 + \boxed{\text{イウエオ}}$$

となる。ア、イウエオの値を求めよ。

ア 2 イウエオ 1620

$S = (80 + 5x)(20 - x)$ を展開する。

$$\begin{aligned} S &= 80 \times 20 + 80 \times (-x) + 5x \times 20 + 5x \times (-x) \\ &= 1600 - 80x + 100x - 5x^2 \\ &= -5x^2 + 20x + 1600 \end{aligned}$$

次に平方完成する。 x^2 の係数 -5 をくくり出す。

$$S = -5(x^2 - 4x) + 1600$$

$$x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4 \text{なので}$$

$$S = -5\{(x - 2)^2 - 4\} + 1600 = -5(x - 2)^2 + 20 + 1600 = -5(x -$$

$$2)^2 + 1620$$

$$S = -5(x - 2)^2 + 1620$$

(2)

先生「値上げの回数は、仕入れの都合で5回以上10回以下に制限されることになりました。」

(1)の結果を利用すると、この範囲で S が最大になるのは $x =$ 力 のときで、そのときの売上金額は $S =$ キクケコ 円である。

力 5 キクケコ 1575

(1)で求めた $S = -5(x - 2)^2 + 1620$ を使う。軸（頂点の x 座標）は $x = 2$ 。今回の範囲は $5 \leq x \leq 10$ で、軸 $x = 2$ はこの範囲より左側にある。

x^2 の係数が $-5 < 0$ （上に凸）なので、軸より右側では S は単調に減少する。範囲 $5 \leq x \leq 10$ は丸ごと軸より右側にあるので、この範囲でも S はずっと減少する。したがって最大値は範囲の左端 $x = 5$ でとる。実際に代入して確かめると $x = 5$ のとき $S = -5(5 - 2)^2 + 1620 = -5 \times 9 + 1620 = -45 + 1620 = 1575$

（参考： $x = 10$ のとき $S = -5(10 - 2)^2 + 1620 = -5 \times 64 + 1620 = -320 + 1620 = 1300$ で、確かに $x = 5$ の方が大きい。）

$x = 5$ のとき最大値 $S = 1575$

(3)

花子「値上げをしすぎると売れなくなるので、売上金額が1495円を下回らないようにしたいです。」

(2)の値上げ回数の制限（5回以上10回以下）の範囲で、 S が1495円以上になる x の範囲を求めると、サ $\leq x \leq$ シ である。

サ 5 シ 7

(1)で求めた $S = -5(x - 2)^2 + 1620$ を使い、 $S \geq 1495$ を解く。

$$-5(x - 2)^2 + 1620 \geq 1495$$

$$-5(x - 2)^2 \geq -125$$

両辺を -5 で割ると、不等号の向きが変わることに注意して

$$(x - 2)^2 \leq 25$$

$$-5 \leq x - 2 \leq 5$$

$$-3 \leq x \leq 7$$

これに(2)で示された値上げ回数の制限 $5 \leq x \leq 10$ (値上げ回数はこの範囲でしか動けない) を合わせる。共通部分をとると

$$5 \leq x \leq 7$$

(検算: $x = 5$ のとき $S = 1575$ 円、 $x = 7$ のとき $S = -5(7 - 2)^2 + 1620 = -125 + 1620 = 1495$ 円。ちょうど境界で1495円になる。)

$$5 \leq x \leq 7$$

大問2 目標時間 8分/配点 20点

花子さんと太郎さんは、授業の発展課題として放物線 $y = x^2 + ax + b$ ($a < 0$) について考えている。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

花子「この放物線、通る点と接する条件が2つ与えられたら、 a と b が両方決まりそうだね。」

太郎「うん。まず条件を式にして、連立方程式を解いてみよう。」

(1) この放物線が点(1, 4)を通り、 x 軸に接するとき、 a , b の値と接点の x 座標を求めよ。 $a = \boxed{\text{ア}}$ (符号もつけて入力)、 $b = \boxed{\text{イ}}$ 、接点の x 座標は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

ア -6 イ 9 ウ 3

点(1, 4)を通るので $x^2 + ax + b$ に $x = 1$, $y = 4$ を代入すると
 $1 + a + b = 4$ より $a + b = 3$ …(1)

「 x 軸に接する」とは、方程式 $x^2 + ax + b = 0$ が重解をもつということ。判別式 $D = 0$ より

$$D = a^2 - 4b = 0 \quad \text{すなわち} \quad b = \frac{a^2}{4} \quad \cdots(2)$$

(2)を(1)に代入する。

$$a + \frac{a^2}{4} = 3$$

両辺に4を掛けて

$$4a + a^2 = 12$$

$$a^2 + 4a - 12 = 0$$

$$(a + 6)(a - 2) = 0$$

よって $a = -6$ または $a = 2$

$$\text{条件 } a < 0 \text{ より } a = -6. (2) \text{ に代入すると } b = \frac{(-6)^2}{4} = \frac{36}{4} = 9$$

このとき方程式は $x^2 - 6x + 9 = 0 \iff (x - 3)^2 = 0$ より、接点の x 座標は $x = 3$ (重解)。

検算: $1^2 + (-6)(1) + 9 = 1 - 6 + 9 = 4$ (点 $(1, 4)$ を通ることを確認)。

$a = -6, b = 9$ 、接点の x 座標は 3 (放物線は $y = (x - 3)^2$)

- (2) (1)で求めた放物線 $y = (x - 3)^2$ と直線 $y = 2x + c$ が異なる2つの共有点を持つのは、 $c > \boxed{\text{エオ}}$ (符号もつけて入力) のときである。

エオ -7

共有点の x 座標は、2つの式を連立して y を消去した方程式の実数解として求まる。

$$(x - 3)^2 = 2x + c$$

$$x^2 - 6x + 9 = 2x + c$$

$$x^2 - 8x + (9 - c) = 0$$

異なる2つの共有点をもつ $\iff$ この2次方程式が異なる2つの実数解をもつ $\iff D > 0$ 。

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (9 - c) = 64 - 36 + 4c = 28 + 4c$$

$$28 + 4c > 0 \text{ より } 4c > -28、\text{よって } c > -7$$

$$c > -7$$

- (3) 逆に、この放物線と直線が共有点を持たないのは、 $c < \boxed{\text{カキ}}$ (符号もつけて入力) のときである。

カキ -7

(2)と同じ方程式 $x^2 - 8x + (9 - c) = 0$ 、 $D = 28 + 4c$ を使う。

共有点を持たない $\iff$ 実数解がない $\iff D < 0$ 。

$$28 + 4c < 0 \text{ より } 4c < -28、\text{よって } c < -7$$

($D = 0$ 、すなわち $c = -7$ のときはちょうど接する、共有点1個の場合にあたる。)

$$c < -7$$