

絶対値

解答（全23問）

氏名 _____

得点 _____ / 23点

DRILL

練習問題（全18問）

基本（1～7）

1

$|x|=a$ の基本形

$|x| = 3$ を解け。

$x = \underline{3, -3}$

原点からの距離が 3 になる点は、3 と -3 。

$x = 3, -3$

2

特殊な形（解が1つ）

$|x| = 0$ を解け。

$x = \underline{0}$

絶対値が 0 になるのは、原点からの距離が 0、つまり原点そのものにいるときだけ。

$x = 0$

3

解なしのパターン

$|x| = -4$ を解け。解がない場合は「解なし」と入力すること。

解 解なし

絶対値は 0 以上の値にしかない。右辺の -4 は負の数なので、これに等しくなる x は存在しない。

解なし

4

 $|x| < a$ の基本形

$|x| < 3$ を解け。解は $-\text{ア} < x < \text{ア}$ の形になる。アの値を求めよ。

ア = 3

原点からの距離が 3 未満になる範囲は、 -3 と 3 の間。

$$-3 < x < 3$$

5

 $|x| > a$ の基本形（等号つき）

$|x| \geq 5$ を解け。解は $x \leq -\text{ア}$ または $\text{ア} \leq x$ の形になる。アの値を求めよ。

ア = 5

原点からの距離が 5 以上になる範囲は、 -5 以下、または 5 以上。

$$x \leq -5 \text{ または } 5 \leq x$$

6

数直線読み取り

次の数直線は、方程式 $|x| = a$ の解を表している。 a の値を求めよ。



この数直線が表す解から、 a の値を求めよう

$$a = \underline{6}$$

数直線上の解は -6 と 6 。これは原点からの距離が 6 の点を表しているので、 $a = 6$ 。

$$a = 6$$

7

 $|x-a|$ 型への導入

$|x - 3| = 7$ を解け。

$$x = \underline{10, -4}$$

$|x - 3| = 7$ は「点3から距離7の点」を求める式。

$x - 3 = 7$ より $x = 10$ 、または $x - 3 = -7$ より $x = -4$ 。

$$x = 10, -4$$

8 $|x - 4| < 6$ を解け。解は $\text{ア} < x < \text{イ}$ の形になる。

$$\text{ア} = \underline{-2} \quad \text{イ} = \underline{10}$$

$|x - 4| < 6$ より $-6 < x - 4 < 6$ 。各辺に 4 を足すと $-6 + 4 < x < 6 + 4$ 。

$$-2 < x < 10$$

9 $|x - 2| > 3$ を解け。解は $x < \text{ア}$ または $\text{イ} < x$ の形になる。

$$\text{ア} = \underline{-1} \quad \text{イ} = \underline{5}$$

$|x - 2| > 3$ は「点2からの距離が3より大きい」範囲。

$x - 2 < -3$ より $x < -1$ 、または $x - 2 > 3$ より $x > 5$ 。

$$x < -1 \text{ または } 5 < x$$

10

係数がある場合

$|3x - 6| = 12$ を解け。

$$x = \underline{6, -2}$$

中身がまるごと 12 になるか、 -12 になるかの2通り。

$3x - 6 = 12$ より $3x = 18$ 、 $x = 6$ 。

$3x - 6 = -12$ より $3x = -6$ 、 $x = -2$ 。

$$x = 6, -2$$

11 $|2x + 1| < 7$ を解け。解は $\text{ア} < x < \text{イ}$ の形になる。

$$\text{ア} = \underline{-4} \quad \text{イ} = \underline{3}$$

$|2x + 1| < 7$ より $-7 < 2x + 1 < 7$ 。

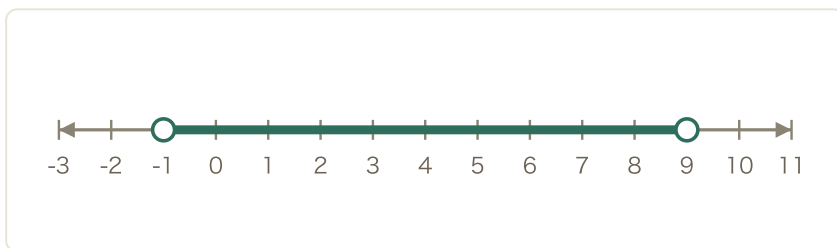
各辺から 1 を引くと $-8 < 2x < 6$ 。

各辺を 2 で割ると $-4 < x < 3$ 。

$$-4 < x < 3$$

12 数直線読み取り ($|x-a|<b$ の形)

次の数直線は、不等式 $|x - a| < b$ の解を表している。 a 、 b の値を求めよ ($b > 0$)。



この範囲は $|x-a|<b$ の解を表している。 a 、 b の値を求めよう

$$a = \underline{4} \quad b = \underline{5}$$

数直線の範囲は $-1 < x < 9$ 。この範囲の中心が a 、中心から端までの距離が b 。

中心は $\frac{-1 + 9}{2} = 4$ なので $a = 4$ 。

中心から端までの距離は $9 - 4 = 5$ (または $4 - (-1) = 5$) なので $b = 5$ 。

確認: $|x - 4| < 5$ を解くと $-5 < x - 4 < 5$ 、つまり $-1 < x < 9$ となり一致する。

$$a = 4, b = 5$$

$|x-1|=3x$ を解け。

$$x = \underline{\underline{1/4}}$$

絶対値の中身 $x-1$ が 0 になるのは $x=1$ 。ここを境に場合分けする。

(i) $x \geq 1$ のとき

$$x-1=3x$$

$$-1=2x$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

前提条件 $x \geq 1$ を満たさない。よって不適。

(ii) $x < 1$ のとき

$$-(x-1)=3x$$

$$-x+1=3x$$

$$1=4x$$

$$x = \frac{1}{4}$$

前提条件 $x < 1$ を満たす。よって適。

(i)は不適、(ii)は適なので、解は $x = \frac{1}{4}$ のみ。

$$x = \frac{1}{4}$$

$|2x - 3| = x + 3$ を解け。

$$x = \underline{6, 0}$$

絶対値の中身 $2x - 3$ が 0 になるのは $x = \frac{3}{2}$ 。ここを境に場合分けする。

(i) $x \geq \frac{3}{2}$ のとき

$$2x - 3 = x + 3$$

$$x = 6$$

前提条件 $x \geq \frac{3}{2}$ を満たす。よって適。

(ii) $x < \frac{3}{2}$ のとき

$$-(2x - 3) = x + 3$$

$$-2x + 3 = x + 3$$

$$-3x = 0$$

$$x = 0$$

前提条件 $x < \frac{3}{2}$ を満たす。よって適。

(i)、(ii)ともに適なので、解は2つとも残る。

$$x = 6, 0$$

15

場合分け不等式

$|2x - 1| < x + 4$ を解け。解は $\text{ア} < x < \text{イ}$ の形になる。

ア = -1 イ = 5

絶対値の中身 $2x - 1$ が 0 になるのは $x = \frac{1}{2}$ 。ここを境に場合分けする。

(i) $x \geq \frac{1}{2}$ のとき

$$2x - 1 < x + 4$$

$$x < 5$$

前提条件 $x \geq \frac{1}{2}$ とあわせると $\frac{1}{2} \leq x < 5$ 。

(ii) $x < \frac{1}{2}$ のとき

$$-(2x - 1) < x + 4$$

$$-2x + 1 < x + 4$$

$$-3x < 3$$

$$x > -1$$

前提条件 $x < \frac{1}{2}$ とあわせると $-1 < x < \frac{1}{2}$ 。

(i)と(ii)の範囲をあわせる（どちらか一方でも成り立てばよい）と、 $-1 < x < \frac{1}{2}$ と $\frac{1}{2} \leq x < 5$ はちょうど $x = \frac{1}{2}$ でつながるので、まとめて $-1 < x < 5$ 。

$$-1 < x < 5$$

16

整数解の個数

$|x - 3| \leq 4$ を満たす整数 x の個数を求めよ。

個数 9 個

$|x - 3| \leq 4$ より $-4 \leq x - 3 \leq 4$ 。各辺に 3 を足すと $-1 \leq x \leq 7$ 。
この範囲の整数は $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ の9個。

9個

17

中身の順序が逆

$|3 - 2x| > 5$ を解け。解は $x < \text{ア}$ または $\text{イ} < x$ の形になる。

ア = -1 イ = 4

$|3 - 2x| > 5$ より、中身が 5 より大きいのか、 -5 より小さいかのどちらか。
 $3 - 2x > 5$ のとき $-2x > 2$ 、両辺を -2 で割ると向きが逆になり $x < -1$ 。
 $3 - 2x < -5$ のとき $-2x < -8$ 、両辺を -2 で割ると向きが逆になり $x > 4$ 。

$x < -1$ または $4 < x$

18

グラフ的な見方

絶対値を使った関数 $y = |x - 2|$ を考える。 y の値が 3 となるような x の値をすべて求めよ。

$x =$ 5, -1

$y = |x - 2|$ のグラフは、点 $(2, 0)$ を頂点とするV字形 ($x = 2$ の左右で折れ曲がる形) になる。 $y = 3$ となる x を求めるには $|x - 2| = 3$ を解けばよい。

$x - 2 = 3$ より $x = 5$ 、または $x - 2 = -3$ より $x = -1$ 。

グラフ上では、V字の左右の斜面がそれぞれ $y = 3$ の高さと交わる2点にあたる。

$x = 5, -1$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。入試の基礎レベルに挑戦しよう。

$|x - 1| + |x - 2| = 5$ を解け。

$$x = \underline{-1, 4}$$

絶対値の中身が 0 になる境界は $x = 1$ と $x = 2$ の2つ。この2つの境界で数直線が3つの区間に分かれるので、3通りに場合分けする。

(i) $x < 1$ のとき ($x - 1 < 0$ 、 $x - 2 < 0$ なのでどちらも符号を反転)

$$-(x - 1) - (x - 2) = 5$$

$$-x + 1 - x + 2 = 5$$

$$-2x + 3 = 5$$

$$-2x = 2$$

$$x = -1$$

前提条件 $x < 1$ を満たす。よって適。

(ii) $1 \leq x < 2$ のとき ($x - 1 \geq 0$ なのでそのまま、 $x - 2 < 0$ なので符号を反転)

$$(x - 1) - (x - 2) = 5$$

$$x - 1 - x + 2 = 5$$

$$1 = 5$$

これは x の値に関係なく成り立たない式（矛盾）。よってこの区間には解なし。

(iii) $x \geq 2$ のとき ($x - 1 \geq 0$ 、 $x - 2 \geq 0$ なのでどちらもそのまま)

$$(x - 1) + (x - 2) = 5$$

$$2x - 3 = 5$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

前提条件 $x \geq 2$ を満たす。よって適。

(i)と(iii)が適なので、解は $x = -1$ と $x = 4$ の2つ。

$$x = -1, 4$$

応2

絶対値を含む不等式の整数解の個数

$|2x - 5| \leq 7$ を満たす整数 x の個数を求めよ。

個数 8 個

$|2x - 5| \leq 7$ より $-7 \leq 2x - 5 \leq 7$ 。

各辺に 5 を足すと $-2 \leq 2x \leq 12$ 。

各辺を 2 で割ると $-1 \leq x \leq 6$ 。

この範囲の整数は $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ の8個。

8個

応3

グラフ的な見方：交点

絶対値を使った関数 $y = |x + 1|$ のグラフと、直線 $y = 4$ の交点の x 座標をすべて求めよ。

$x =$ 3,-5

交点の x 座標は、 $|x + 1| = 4$ を解けば求められる（グラフ上の高さが $y = 4$ になる x を求めることと同じ）。

$x + 1 = 4$ より $x = 3$ 。

$x + 1 = -4$ より $x = -5$ 。

$y = |x + 1|$ のグラフは点 $(-1, 0)$ を頂点とするV字形なので、 $y = 4$ の高さでは左右の斜面それぞれと交わり、交点は2つになる。

$x = 3, -5$

$|x + 2| \geq 3x$ を解け。解は $x \leq \text{ア}$ の形になる。

ア = 1

絶対値の中身 $x + 2$ が 0 になるのは $x = -2$ 。ここを境に場合分けする。

(i) $x \geq -2$ のとき ($x + 2 \geq 0$ なのでそのまま外せる)

$$x + 2 \geq 3x$$

$$2 \geq 2x$$

$$x \leq 1$$

前提条件 $x \geq -2$ とあわせると $-2 \leq x \leq 1$ 。

(ii) $x < -2$ のとき ($x + 2 < 0$ なので符号を反転)

$$-(x + 2) \geq 3x$$

$$-x - 2 \geq 3x$$

$$-2 \geq 4x$$

$$x \leq -\frac{1}{2}$$

前提条件 $x < -2$ とあわせると、 $x < -2$ はすでに $x \leq -\frac{1}{2}$ を満たすので、そのまま $x < -2$ がすべて解になる。

(i)の範囲 $-2 \leq x \leq 1$ と(ii)の範囲 $x < -2$ をあわせると、 $x < -2$ と $-2 \leq x \leq 1$ はちょうど $x = -2$ でつながるので、まとめて $x \leq 1$ 。

$$x \leq 1$$

$|x - 3| + |x + 2|$ の最小値を求めよ。

最小値 5

$|x - 3|$ は点3から x までの距離、 $|x + 2|$ は点 -2 から x までの距離を表す。つまりこの式は「 x から点3までの距離」と「 x から点 -2 までの距離」の合計。

x が -2 と 3 の間 ($-2 \leq x \leq 3$) にあるときは、2つの距離の合計はちょうど 3 と -2 の間の距離、つまり $3 - (-2) = 5$ になる（間を行き来する分の距離が無駄なく使われる）。

x が -2 と 3 の間から外れると、外れた分だけ遠回りになり、合計の距離は 5 より大きくなる。

したがって、合計の距離が最小になるのは x が -2 以上 3 以下のときで、その最小値は 5 。

最小値 5