

因数分解

解答（全25問）

氏名 _____

得点 _____ / 25点

DRILL

練習問題（全20問）

基本（1～8）

1

共通因数でくくる

$x^2 + 5x$ を因数分解せよ。

$x(x + \underline{5})$

共通因数は x 。 $x^2 \div x = x$ 、 $5x \div x = 5$ 。

$$x^2 + 5x = x(x + 5)$$

2

共通因数でくくる（負の数に注意）

$3x^2 - 12x$ を因数分解せよ。

$3x(x + \underline{-4})$

係数の最大公約数は 3、文字は x が共通。共通因数は $3x$ 。

$3x^2 \div 3x = x$ 、 $-12x \div 3x = -4$ 。

$$3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$$

3

公式1: $x^2 + (a+b)x + ab$ (正の数どうし) $x^2 + 7x + 12$ を因数分解せよ。

$$(x + \underline{3})(x + \underline{4})$$

和が 7、積が 12 になる2数は 3 と 4 ($3 + 4 = 7$ 、 $3 \times 4 = 12$)。

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$$

4

公式1: 負の数を含む場合

 $x^2 - 2x - 15$ を因数分解せよ。

$$(x + \underline{-5})(x + \underline{3})$$

和が -2 、積が -15 になる2数は -5 と 3 ($(-5) + 3 = -2$ 、 $(-5) \times 3 = -15$)。

$$x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$$

5

公式2: 平方の差

 $x^2 - 16$ を因数分解せよ。

$$(x + \underline{-4})(x + \underline{4})$$

 $16 = 4^2$ なので $x^2 - 16 = x^2 - 4^2$ 。

$$x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$$

6

公式2：平方の差（係数つき）

$4x^2 - 9$ を $(\text{ア}x + \text{イ})(\text{ウ}x + \text{エ})$ の形に因数分解せよ（ $\text{ア} \leq \text{ウ}$ 、 $\text{ア} = \text{ウ}$ のときは $\text{イ} \leq \text{エ}$ で入力）。

$$(\underline{2}x + \underline{-3})(\underline{2}x + \underline{3})$$

$$4x^2 = (2x)^2, 9 = 3^2 \text{ なので } 4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2.$$

$$4x^2 - 9 = (2x - 3)(2x + 3)$$

7

公式3：完全平方（+の場合）

$x^2 + 8x + 16$ を因数分解せよ。

$$(x + \underline{4})^2$$

$$16 = 4^2. x \text{ の係数 } 8 \text{ が } 2 \times 4 = 8 \text{ と一致するので完全平方。}$$

$$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$$

8

公式3：完全平方（-の場合）

$x^2 - 10x + 25$ を因数分解せよ。

$$(x + \underline{-5})^2$$

$$25 = 5^2. x \text{ の係数 } -10 \text{ が } -2 \times 5 = -10 \text{ と一致するので完全平方（マイナス側）。}$$

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$$

9 $x^2 - x - 42$ を因数分解せよ。

$$(x + \underline{-7})(x + \underline{6})$$

和が -1 、積が -42 になる2数は -7 と 6 ($(-7) + 6 = -1$ 、 $(-7) \times 6 = -42$)。

$$x^2 - x - 42 = (x - 7)(x + 6)$$

10 $6x^2y - 8xy^2$ を因数分解せよ。

$$2xy(\underline{3}x + \underline{-4}y)$$

係数 $6, 8$ の最大公約数は 2 。文字は x, y がどちらも共通。共通因数は $2xy$ 。

$$6x^2y \div 2xy = 3x、-8xy^2 \div 2xy = -4y。$$

$$6x^2y - 8xy^2 = 2xy(3x - 4y)$$

- 11 $2x^2 + 7x + 3$ を $(\text{ア}x + \text{イ})(\text{ウ}x + \text{エ})$ の形に因数分解せよ（ $\text{ア} \leq \text{ウ}$ 、 $\text{ア} = \text{ウ}$ のときは $\text{イ} \leq \text{エ}$ で入力）。

$$(\underline{1}x + \underline{3})(\underline{2}x + \underline{1})$$

$a = 2, c = 3$ 。たてを 2×1 、たてを 3×1 にして表を作る。

$p = 2, q = 1, r = 1, s = 3$ とすると、ななめの和 $2 \times 3 + 1 \times 1 = 6 + 1 = 7$ は $b = 7$ と合わない。

$p = 2, q = 3, r = 1, s = 1$ にすると、ななめの和 $2 \times 1 + 1 \times 3 = 2 + 3 = 5 \dots\dots$ こちらも合わない場合はさらに組み合わせを試し、

$p = 1, q = 3, r = 2, s = 1$ （左を $x + 3$ 、右を $2x + 1$ とする形）で確認すると、たて $1 \times 2 = 2 = a$ 、 $3 \times 1 = 3 = c$ 、ななめ $1 \times 1 + 2 \times 3 = 1 + 6 = 7 = b$ で一致。

$$2x^2 + 7x + 3 = (x + 3)(2x + 1)$$

- 12 $3x^2 - 5x - 2$ を $(\text{ア}x + \text{イ})(\text{ウ}x + \text{エ})$ の形に因数分解せよ（ $\text{ア} \leq \text{ウ}$ 、 $\text{ア} = \text{ウ}$ のときは $\text{イ} \leq \text{エ}$ で入力）。

$$(\underline{1}x + \underline{-2})(\underline{3}x + \underline{1})$$

$a = 3, c = -2$ 。左を $x - 2$ 、右を $3x + 1$ として確認する。

たて： $1 \times 3 = 3 = a$ 、 $(-2) \times 1 = -2 = c$ 。

ななめの和： $1 \times 1 + 3 \times (-2) = 1 - 6 = -5 = b$ で一致。

$$3x^2 - 5x - 2 = (x - 2)(3x + 1)$$

- 13 $2x^2 - 3x - 2$ を $(アx + イ)(ウx + エ)$ の形に因数分解せよ ($ア \leq ウ$ 、 $ア = ウ$ のときは $イ \leq エ$ で入力)。

$$(\underline{1} x + \underline{-2})(\underline{2} x + \underline{1})$$

$a = 2, c = -2$ 。左を $x - 2$ 、右を $2x + 1$ として確認する。

たて: $1 \times 2 = 2 = a$ 、 $(-2) \times 1 = -2 = c$ 。

ななめの和: $1 \times 1 + 2 \times (-2) = 1 - 4 = -3 = b$ で一致。

$$2x^2 - 3x - 2 = (x - 2)(2x + 1)$$

- 14 $6x^2 + 7x - 3$ を $(アx + イ)(ウx + エ)$ の形に因数分解せよ ($ア \leq ウ$ 、 $ア = ウ$ のときは $イ \leq エ$ で入力)。

$$(\underline{2} x + \underline{3})(\underline{3} x + \underline{-1})$$

$a = 6, c = -3$ 。左を $2x + 3$ 、右を $3x - 1$ として確認する。

たて: $2 \times 3 = 6 = a$ 、 $3 \times (-1) = -3 = c$ 。

ななめの和: $2 \times (-1) + 3 \times 3 = -2 + 9 = 7 = b$ で一致。

$$6x^2 + 7x - 3 = (2x + 3)(3x - 1)$$

- 15 $4x^2 + 12x + 9$ を $(アx + イ)^2$ の形に因数分解せよ。

$$(\underline{2} x + \underline{3})^2$$

$4x^2 = (2x)^2$ 、 $9 = 3^2$ 。 x の係数 12 が $2 \times 2 \times 3 = 12$ と一致するので完全平方。

$$4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2$$

- 16 $9x^2 - 4y^2$ を $(アx + イy)(ウx + エy)$ の形に因数分解せよ (ア $\leq$ ウ、ア=ウのときはイ $\leq$ エで入力)。

$$(\underline{3} x + \underline{-2} y)(\underline{3} x + \underline{2} y)$$

$$9x^2 = (3x)^2, 4y^2 = (2y)^2 \text{ なので } 9x^2 - 4y^2 = (3x)^2 - (2y)^2.$$

$$9x^2 - 4y^2 = (3x - 2y)(3x + 2y)$$

挑戦 (17~20)

- 17 置き換え型 ($t=x-2$)

$(x-2)^2 - 7(x-2) + 10$ を因数分解せよ。

$$(x + \underline{-7})(x + \underline{-4})$$

$t = x - 2$ とおく。 $t^2 - 7t + 10 = (t - 2)(t - 5)$ (和が -7 、積が 10 になる2数は $-2, -5$)。

t をもとに戻す: $t - 2 = (x - 2) - 2 = x - 4$ 、 $t - 5 = (x - 2) - 5 = x - 7$ 。

$$(x - 2)^2 - 7(x - 2) + 10 = (x - 4)(x - 7)$$

- 18 複2次式 ($t=x^2$)

$x^4 - 10x^2 + 9$ を $(x + ア)(x + イ)(x + ウ)(x + エ)$ の形に因数分解せよ (ア $\leq$ イ $\leq$ ウ $\leq$ エで入力)。

$$(x + \underline{-3})(x + \underline{-1})(x + \underline{1})(x + \underline{3})$$

$t = x^2$ とおく。 $t^2 - 10t + 9 = (t - 1)(t - 9)$ (和が -10 、積が 9 になる2数は $-1, -9$)。

t をもとに戻す: $t - 1 = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ 、 $t - 9 = x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ 。

$$x^4 - 10x^2 + 9 = (x - 3)(x - 1)(x + 1)(x + 3)$$

$x^2 + xy + x + 2y - 2$ を $(x + \text{ア})(x + y + \text{イ})$ の形に因数分解せよ。

$$(x + \underline{2})(x + y + \underline{-1})$$

x は2次、 y は1次 (xy と $2y$ しかない) なので y について整理する。

y を含む項: $xy + 2y = y(x + 2)$ 。

y を含まない項: $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$ (和が1、積が-2になる2数は2, -1)。

合わせて $y(x + 2) + (x + 2)(x - 1) = (x + 2)\{y + (x - 1)\} = (x + 2)(x + y - 1)$

$$x^2 + xy + x + 2y - 2 = (x + 2)(x + y - 1)$$

$2x^2 + xy - y^2 + 5x - y + 2$ を因数分解せよ。(結果は details で確認)

x について整理すると $2x^2 + (y + 5)x - (y^2 + y - 2)$ 。

定数項の部分 $y^2 + y - 2$ を先に因数分解すると $(y - 1)(y + 2)$ (和が1、積が-2になる2数は2, -1)。

これをたすき掛けの「たて」に使う。左を $2x - (y - 1)$ 、右を $x + (y + 2)$ として確認する。

たて: $1 \times 2 = 2 = a$ 、 $-(y - 1) \times (y + 2) = -(y^2 + y - 2)$ で定数部分と一致。

ななめの和: $2 \times (y + 2) + 1 \times \{-(y - 1)\} = 2y + 4 - y + 1 = y + 5$ で x の係数と一致。

$$2x^2 + xy - y^2 + 5x - y + 2 = (2x - y + 1)(x + y + 2)$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

複2次式

$x^4 - 13x^2 + 36$ を $(x + \text{ア})(x + \text{イ})(x + \text{ウ})(x + \text{エ})$ の形に因数分解せよ（ $\text{ア} \leq \text{イ} \leq \text{ウ} \leq \text{エ}$ で入力）。

$(x + \underline{-3})(x + \underline{-2})(x + \underline{2})(x + \underline{3})$

$t = x^2$ とおく。 $t^2 - 13t + 36 = (t - 4)(t - 9)$ （和が -13 、積が 36 になる2数は $-4, -9$ ）。

t をもとに戻す： $t - 4 = x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ 、 $t - 9 = x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ 。

$$x^4 - 13x^2 + 36 = (x - 3)(x - 2)(x + 2)(x + 3)$$

応2

2変数の対称式

$a^2 - b^2 + a - b$ を $(a - b)(a + b + \text{ア})$ の形に因数分解せよ。

$(a - b)(a + b + \underline{1})$

前半2項は平方の差： $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ 。

残りの $a - b$ は、そのまま $(a - b)$ という共通因数として見ることができる（ $a - b = 1 \times (a - b)$ と考える）。

$$(a + b)(a - b) + (a - b) = (a - b)\{(a + b) + 1\} = (a - b)(a + b + 1)$$

$$a^2 - b^2 + a - b = (a - b)(a + b + 1)$$

応3

次数が最も低い文字で整理（本格）

$2x^2 + 3xy + x + 3y - 1$ を $(x + \text{ア})(\text{イ}x + \text{ウ}y + \text{エ})$ の形に因数分解せよ。

$$(x + \underline{1})(\underline{2}x + \underline{3}y + \underline{-1})$$

x は2次 ($2x^2$)、 y は1次 ($3xy$ と $3y$ しかない) なので y について整理する。

y を含む項: $3xy + 3y = 3y(x + 1)$ 。

y を含まない項: $2x^2 + x - 1$ 。たすき掛けで因数分解すると、たて $1 \times 2 = 2$ 、
 $(-1) \times 1 = -1$ 、ななめの和 $1 \times 1 + 2 \times (-1) = 1 - 2 = -1$ で一致するので
 $2x^2 + x - 1 = (2x - 1)(x + 1)$ 。

合わせて $3y(x + 1) + (2x - 1)(x + 1) = (x + 1)\{3y + (2x - 1)\} = (x + 1)(2x + 3y - 1)$

$$2x^2 + 3xy + x + 3y - 1 = (x + 1)(2x + 3y - 1)$$

応4

複2次式：これ以上分解できない因子に注意

$x^4 - 5x^2 - 36$ を $(x + \text{ア})(x + \text{イ})(x^2 + \text{ウ})$ の形に因数分解せよ（ $\text{ア} \leq \text{イ}$ で入力）。

$$(x + \underline{-3})(x + \underline{3})(x^2 + \underline{4})$$

$t = x^2$ とおく。 $t^2 - 5t - 36 = (t - 9)(t + 4)$ （和が -5 、積が -36 になる2数は $-9, 4$ ）。

t をもとに戻す: $t - 9 = x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ （平方の差でさらに分解できる）。

$t + 4 = x^2 + 4$ は、和が 0 ・積が 4 になる実数の2数が存在しないため、これ以上は因数分解できない（このまま残す）。

$$x^4 - 5x^2 - 36 = (x - 3)(x + 3)(x^2 + 4)$$

n を整数とすると、 $n^2 + n$ は必ず 2 の倍数になることを、因数分解を利用して説明せよ。

$n^2 + n$ は n が共通因数なので $n^2 + n = n(n + 1)$ と因数分解できる。

n と $n + 1$ は連続する2つの整数である。連続する2つの整数のうち、必ずどちらか一方は偶数（2 の倍数）になる。

したがって $n(n + 1)$ は「偶数」と「整数」の積になるので、必ず 2 の倍数である。

$n^2 + n = n(n + 1)$ であり、 $n, n + 1$ の一方は必ず偶数だから、 $n^2 + n$ は常に2の倍数になる。