

分散と標準偏差

解答（全21問）

氏名 _____

得点 _____ / 21点

DRILL

練習問題（全16問）

基本（1～6）

1

まずは偏差から

データ 8, 8, 12, 12 について、平均・分散・標準偏差を求めよ。

平均 10 分散 4 標準偏差 2

$$\text{平均} = \frac{8 + 8 + 12 + 12}{4} = \frac{40}{4} = 10$$

偏差は $-2, -2, 2, 2$ 。2乗の和は $4 + 4 + 4 + 4 = 16$ 。

$$\text{分散} = \frac{16}{4} = 4, \text{標準偏差} = \sqrt{4} = 2$$

平均 10、分散 4、標準偏差 2

2

偏差の合計は必ず0になることを確認しよう

データ 14, 18, 20, 22, 26 について、平均・分散・標準偏差を求めよ。

平均 20 分散 16 標準偏差 4

$$\text{平均} = \frac{14 + 18 + 20 + 22 + 26}{5} = \frac{100}{5} = 20$$

偏差は $-6, -2, 0, 2, 6$ (合計するとちょうど 0 になる)。2乗の和は $36 + 4 + 0 + 4 + 36 = 80$ 。

$$\text{分散} = \frac{80}{5} = 16, \text{標準偏差} = \sqrt{16} = 4$$

平均 20、分散 16、標準偏差 4

3

データの個数が変わっても考え方は同じ

データ 8, 8, 8, 12, 12, 12 (6個) について、平均・分散・標準偏差を求めよ。

平均 10 分散 4 標準偏差 2

$$\text{平均} = \frac{8 + 8 + 8 + 12 + 12 + 12}{6} = \frac{60}{6} = 10$$

偏差は $-2, -2, -2, 2, 2, 2$ 。2乗の和は $4 \times 6 = 24$ 。

$$\text{分散} = \frac{24}{6} = 4, \text{標準偏差} = \sqrt{4} = 2$$

平均 10、分散 4、標準偏差 2

4

公式「 $\overline{x^2} - (\bar{x})^2$ 」を使ってみよう

データ 7, 7, 7, 13, 13, 13 (6個) の分散を、 $\overline{x^2} - (\bar{x})^2$ の公式で求め、標準偏差も答えよ。

分散 9 標準偏差 3

$$\text{平均} = \frac{7 + 7 + 7 + 13 + 13 + 13}{6} = \frac{60}{6} = 10$$

x^2 は 49, 49, 49, 169, 169, 169。和は $49 \times 3 + 169 \times 3 = 147 + 507 = 654$ 。

$$\overline{x^2} = \frac{654}{6} = 109$$

$$V = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 109 - 10^2 = 109 - 100 = 9、標準偏差 = \sqrt{9} = 3$$

分散 9、標準偏差 3

5

全員に同じ数を足す→分散はどうなる？

データ 8, 8, 12, 12 (平均10、分散4) の全員に 5 を足すと、新しいデータの平均・分散・標準偏差はいくらになるか。

平均 15 分散 4 標準偏差 2

全員に +5 するので新しいデータは 13, 13, 17, 17。

平均は $10 + 5 = 15$ 。偏差は元と同じ $-2, -2, 2, 2$ のままなので分散は変わらず 4、標準偏差も変わらず 2。

平均 15、分散 4、標準偏差 2

6

全員の値をb倍する→分散は b^2 倍

データ 14, 18, 20, 22, 26 (平均20、分散16) の全員を 1.5 倍すると、新しいデータの平均・分散・標準偏差はいくらになるか。

平均 30 分散 36 標準偏差 6

平均は $20 \times 1.5 = 30$ 。分散は $1.5^2 = 2.25$ 倍なので $16 \times 2.25 = 36$ 。標準偏差は 1.5 倍なので $4 \times 1.5 = 6$ 。

(検算：新しいデータは 21, 27, 30, 33, 39。偏差 $-9, -3, 0, 3, 9$ の2乗和は $81 + 9 + 0 + 9 + 81 = 180$ 、 $180 \div 5 = 36$ で一致。)

平均 30、分散 36、標準偏差 6

標準 (7~12)

7

標準偏差が無理数になることもある

データ 46, 48, 50, 52, 54 の分散と標準偏差を求めよ。

分散 8 標準偏差 $2\sqrt{2}$

$$\text{平均} = \frac{46 + 48 + 50 + 52 + 54}{5} = \frac{250}{5} = 50$$

偏差は $-4, -2, 0, 2, 4$ 。2乗の和は $16 + 4 + 0 + 4 + 16 = 40$ 。

$$\text{分散} = \frac{40}{5} = 8$$

8 はきれいな平方数ではないので、標準偏差は $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$ と根号を簡単にした形で答える。

分散 8、標準偏差 $2\sqrt{2}$ (≈ 2.83)

データ 48, 49, 51, 52 の分散を求めよ。

分散 2.5

$$\text{平均} = \frac{48 + 49 + 51 + 52}{4} = \frac{200}{4} = 50$$

偏差は $-2, -1, 1, 2$ 。2乗の和は $4 + 1 + 1 + 4 = 10$ 。

$$\text{分散} = \frac{10}{4} = 2.5$$

分散 2.5

データ 27, 29, 31, 33 の分散と標準偏差を求めよ。

分散 5 標準偏差 √5

$$\text{平均} = \frac{27 + 29 + 31 + 33}{4} = \frac{120}{4} = 30$$

偏差は $-3, -1, 1, 3$ 。2乗の和は $9 + 1 + 1 + 9 = 20$ 。

$$\text{分散} = \frac{20}{4} = 5$$

5 は平方数ではないので、標準偏差はそのまま $\sqrt{5}$ で答える（これ以上簡単にならない）。

分散 5、標準偏差 $\sqrt{5}$ (≈ 2.24)

- 10 データ 14, 18, 20, 22, 26 (平均20、分散16) の全員から 8 を引くと、新しいデータの平均・分散・標準偏差はいくらになるか。

平均 12 分散 16 標準偏差 4

「8 を引く」は「 -8 を足す」と同じこと。平均は $20 - 8 = 12$ 。
偏差の形は変わらない ($-6, -2, 0, 2, 6$) ので分散は変わらず 16、標準偏差も変わらず 4。

平均 12、分散 16、標準偏差 4

- 11 データ 2, 4, 5, 6, 8 (平均5、分散4) の全員を -3 倍すると、新しいデータの平均・分散・標準偏差はいくらになるか。

平均 -15 分散 36 標準偏差 6

平均は $5 \times (-3) = -15$ 。分散は b の符号に関係なく b^2 倍なので $(-3)^2 = 9$ 倍、 $4 \times 9 = 36$ 。標準偏差は $|b| = 3$ 倍なので $2 \times 3 = 6$ (標準偏差はマイナスにはならない)。

(検算：新しいデータは $-6, -12, -15, -18, -24$ 。平均 $= \frac{-6 - 12 - 15 - 18 - 24}{5} = \frac{-75}{5} = -15$ 。偏差 $9, 3, 0, -3, -9$ の2乗和は $81 + 9 + 0 + 9 + 81 = 180$ 、 $180 \div 5 = 36$ で一致。)

平均 -15、分散 36、標準偏差 6

12

 $y=2x+3$ の形（分散に効くのはbの部分だけ）

あるデータの平均が 8、分散が 5 である。このデータの全員を2倍してから3を足した新しいデータ ($y = 2x + 3$) の平均・分散・標準偏差を求めよ。

平均 19 分散 20 標準偏差 $2\sqrt{5}$

平均は「2倍して3を足す」をそのまま平均に適用すればよい： $8 \times 2 + 3 = 19$ 。

分散は「3を足す」部分は無関係で、「2倍」の部分だけが $2^2 = 4$ 倍として効く： $5 \times 4 = 20$ 。

標準偏差は $\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$ 。

平均 19、分散 20、標準偏差 $2\sqrt{5}$ (≈ 4.47)

挑戦 (13~16)

13

平均条件から未知のデータを逆算

データ 3, 5, 9, x (4個) の平均が 6 であるとき、 x の値と、このデータの分散・標準偏差を求めよ。

$x =$ 7 分散 5 標準偏差 $\sqrt{5}$

平均 6 より合計は $6 \times 4 = 24$ 。 $3 + 5 + 9 = 17$ なので $x = 24 - 17 = 7$ 。

データは 3, 5, 7, 9。偏差は $-3, -1, 1, 3$ 。2乗の和は $9 + 1 + 1 + 9 = 20$ 。

分散 $= \frac{20}{4} = 5$ 、標準偏差 $= \sqrt{5}$ 。

$x = 7$ 、分散 5、標準偏差 $\sqrt{5}$

14

散らばりの大きさを分散で比較

Aグループのデータ 5, 6, 7, 8, 9 と、Bグループのデータ 3, 5, 7, 9, 11 は、どちらも平均が 7 である。それぞれの分散を求め、Bの分散はAの何倍かを答えよ。

Aの分散 2 Bの分散 8 Bの分散はAの 4 倍

Aグループ：偏差は $-2, -1, 0, 1, 2$ 。2乗和 $= 4 + 1 + 0 + 1 + 4 = 10$ 。分散 $= \frac{10}{5} = 2$

Bグループ：偏差は $-4, -2, 0, 2, 4$ 。2乗和 $= 16 + 4 + 0 + 4 + 16 = 40$ 。分散 $= \frac{40}{5} = 8$

Bの分散 $\div$ Aの分散 $= 8 \div 2 = 4$ 。平均が同じでも、データの散らばり方が違うと分散は大きく変わることがわかる。

Aの分散 2、Bの分散 8、Bの分散はAの 4 倍

15

公式を逆向きに使う

あるデータ5個について、 x^2 の平均が 125、平均が 10 であることがわかっている。このデータの分散と標準偏差を求めよ。

分散 25 標準偏差 5

公式 $V = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$ にそのまま当てはめる。

$$V = 125 - 10^2 = 125 - 100 = 25$$

標準偏差は $\sqrt{25} = 5$ 。個々のデータの値がわからなくても、 $\overline{x^2}$ と平均さえわかれば分散は計算できる。

分散 25、標準偏差 5

あるデータを2倍してから3を引いたところ ($y = 2x - 3$)、新しいデータの平均は17、分散は48になった。もとのデータの平均・分散・標準偏差を求めよ。

もとの平均 10 もとの分散 12 もとの標準偏差 $2\sqrt{3}$

もとの平均を m 、分散を V とする。

平均について： $2m - 3 = 17$ より $2m = 20$ 、 $m = 10$ 。

分散について：「3を引く」は分散に影響しないので、効くのは「2倍」の部分だけ。
 $2^2 \times V = 48$ より $4V = 48$ 、 $V = 12$ 。

標準偏差は $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$ 。

もとの平均 10、もとの分散 12、もとの標準偏差 $2\sqrt{3}$ (≈ 3.46)

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。グループの合併や仮平均など、入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

2グループ合併・加重平均

生徒20人のクラスAの小テストの平均点は65点、生徒30人のクラスBの平均点は75点であった。AとBを合わせた全体の生徒数と、全体の平均点を求めよ。

生徒総数 50 人 全体の平均点 71 点

合計人数は $20 + 30 = 50$ 人。

平均点は「人数の重みつき平均」で計算する。人数が違うグループを単純に $\frac{65 + 75}{2}$ と平均してはいけない（それは人数を無視した誤り）。

合計点は Aの合計 + Bの合計 $= 20 \times 65 + 30 \times 75 = 1300 + 2250 = 3550$ 点。

全体の平均点 $= \frac{3550}{50} = 71$ 点。

生徒総数 50人、全体の平均点 71点

生徒5人のグループAは平均4点・分散2、生徒5人のグループBは平均8点・分散2であった。AとBを合わせた10人全体の平均点と分散を求めよ。

全体の平均点 6 全体の分散 6

$$\text{全体の平均点} = \frac{5 \times 4 + 5 \times 8}{10} = \frac{20 + 40}{10} = \frac{60}{10} = 6 \text{点。}$$

分散は「各グループの分散をそのまま平均する」だけでは求まらない。各グループの平均が全体の平均からずれている分（ $6 - 4 = 2$ 、 $6 - 8 = -2$ ）も加味する必要がある。

$\overline{x^2}$ を使う方法で確認する。公式2つ目 $V = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$ を逆に使うと $\overline{x^2} = V + (\bar{x})^2$ 。

$$\text{Aグループ} : \overline{x^2}_A = 2 + 4^2 = 2 + 16 = 18, \text{ 合計} = 5 \times 18 = 90$$

$$\text{Bグループ} : \overline{x^2}_B = 2 + 8^2 = 2 + 64 = 66, \text{ 合計} = 5 \times 66 = 330$$

$$\text{全体の } \overline{x^2} = \frac{90 + 330}{10} = \frac{420}{10} = 42$$

$$\text{全体の分散} = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 42 - 6^2 = 42 - 36 = 6$$

全体の平均点 6、全体の分散 6

データ 48, 50, 53, 55, 49 について、平均を求めやすくするため**仮平均 50** を基準にとる。各データから 50 を引いた「仮の偏差」を使って、真の平均と分散を求めよ。

真の平均 51 分散 6.8

仮平均を $p = 50$ とし、各データから p を引いた「仮の偏差」 $d = x - p$ を作る。
 d は $-2, 0, 3, 5, -1$ 。この和は $-2 + 0 + 3 + 5 - 1 = 5$ 、平均は $\bar{d} = \frac{5}{5} = 1$ 。

真の平均は「仮平均+仮の偏差の平均」で求まる： $\bar{x} = p + \bar{d} = 50 + 1 = 51$ 。
 (検算： $48 + 50 + 53 + 55 + 49 = 255$ 、 $255 \div 5 = 51$ で一致。)

分散は、仮平均だけずらしても散らばり方は変わらないので「 d についての分散」と同じ。公式2つ目を d に対して使う。

d^2 は 4, 0, 9, 25, 1。和は 39、 $\overline{d^2} = \frac{39}{5} = 7.8$

$$V = \overline{d^2} - (\bar{d})^2 = 7.8 - 1^2 = 7.8 - 1 = 6.8$$

(検算：真の平均51からの偏差は $-3, -1, 2, 4, -2$ 、2乗和は $9 + 1 + 4 + 16 + 4 = 34$ 、 $34 \div 5 = 6.8$ で一致。)

真の平均 51、分散 6.8

データ 4, 7, x , y (4個、 $\backslash(x$

$$x = \underline{8} \quad y = \underline{9}$$

平均条件 (式A) : $\frac{4 + 7 + x + y}{4} = 7$ より $4 + 7 + x + y = 28$ 、 $x + y = 17$

分散条件 (式B) : 偏差は $4 - 7 = -3$ 、 $7 - 7 = 0$ 、 $x - 7$ 、 $y - 7$ 。

$$V = \frac{(-3)^2 + 0^2 + (x - 7)^2 + (y - 7)^2}{4} = 3.5 \text{ より } (x - 7)^2 + (y - 7)^2 = 14 - 9 = 5$$

ここで $u = x - 7$ 、 $v = y - 7$ とおくと、式Aより $u + v = 17 - 14 = 3$ 、式Bより $u^2 + v^2 = 5$ 。

$$v = 3 - u \text{ を式Bに代入 : } u^2 + (3 - u)^2 = 5$$

$$u^2 + 9 - 6u + u^2 = 5$$

$$2u^2 - 6u + 4 = 0$$

$$u^2 - 3u + 2 = 0$$

$$(u - 1)(u - 2) = 0 \text{ より } u = 1 \text{ または } u = 2。$$

$$u = 1 \text{ のとき } v = 2 \rightarrow x = 8, y = 9$$

$$u = 2 \text{ のとき } v = 1 \rightarrow x = 9, y = 8$$

$$\backslash(x = 8, y = 9$$

10人のクラスの小テストの平均点は 60点、分散は 25 であった。全員に一律5点のボーナスを加点した後、さらに全員の点数を 1.2 倍する特別措置を行った（先にボーナス、その後に倍率）。最終的な平均点・分散・標準偏差を求めよ。

最終的な平均点 78 分散 36 標準偏差 6

もとの点数を x とすると、最終的な点数は $y = 1.2(x + 5) = 1.2x + 6$ （先にボーナス、その後に倍率をかけると、この順に展開される）。

平均： $1.2 \times 60 + 6 = 72 + 6 = 78$ 点。

分散：「+6」の部分は分散に無関係で、「1.2 倍」の部分だけが $1.2^2 = 1.44$ 倍として効く。

$$25 \times 1.44 = 36$$

標準偏差： $\sqrt{36} = 6$ 。

最終的な平均点 78点、分散 36、標準偏差 6