

数I まとめテスト

解答（全42問）

氏名 _____

得点 _____ / 42点

DRILL

まとめテスト（標準）

基本（1～20）

1

数と式：展開

$(x + 7)(x - 5)$ を展開せよ。

x^2 の係数 1 x の係数 2 定数項 -35

4つの積を作る： $x \times x = x^2$ 、 $x \times (-5) = -5x$ 、 $7 \times x = 7x$ 、 $7 \times (-5) = -35$
 x の項をまとめる： $-5x + 7x = 2x$

$$(x + 7)(x - 5) = x^2 + 2x - 35$$

2

数と式：因数分解

$x^2 + 2x - 15$ を因数分解せよ（ア≦イで入力）。

(x+ア -3)(x+イ 5)

和が2、積が-15になる2数を探す。 $5 + (-3) = 2$ 、 $5 \times (-3) = -15$ なので5と-3。

$$x^2 + 2x - 15 = (x - 3)(x + 5)$$

3

数と式：根号の計算

$\sqrt{48} - \sqrt{27}$ を計算せよ。

答え $\sqrt{3}$

それぞれ簡約する。

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$$

$$\sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3}$$

根号の中身がそろったので引き算できる。 $4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$

$$\sqrt{48} - \sqrt{27} = \sqrt{3}$$

4

数と式：絶対値方程式

$|x + 4| = 6$ を解け。

$x =$ 2,-10

$|x + 4| = 6$ は「点-4から距離6の点」を求める式。

$x + 4 = 6$ より $x = 2$ 、または $x + 4 = -6$ より $x = -10$ 。

$$x = 2, -10$$

5

集合と命題：要素の個数

$n(A) = 15, n(B) = 10, n(A \cap B) = 4$ のとき、 $n(A \cup B)$ を求めよ。

$$n(A \cup B) = \underline{21}$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 15 + 10 - 4 = 21$$

$$n(A \cup B) = 21$$

6

集合と命題：部分集合の個数

要素が5個の集合の部分集合は何個あるか求めよ。

答え 32 個

要素1個ごとに「入れる・入れない」の2通りがあるので、部分集合の個数は $2^5 = 32$ 個（空集合と自分自身も1個と数える）。

32個

7

集合と命題：必要条件・十分条件

条件 p ：「 $x = 3$ 」、条件 q ：「 $x^2 = 9$ 」とする。 p は q であるための何条件か答えよ。

答え (十分条件) / 必要条件 / 必要十分条件 / どちらでもない

$p \Rightarrow q$: $x = 3$ ならば $x^2 = 9$ は成り立つ（真）。

$q \Rightarrow p$: $x^2 = 9$ ならば $x = 3$ とは限らない（ $x = -3$ という反例がある）ので偽。

$p \Rightarrow q$ だけが真なので、 p は q であるための十分条件（必要条件ではない）。

十分条件

8

集合と命題：条件の否定（ド・モルガンの法則）

条件「 $x \geq 2$ かつ $y \leq 5$ 」の否定を求めよ。否定は「 $x < \text{ア}$ または $y > \text{イ}$ 」の形になる。

$$\text{ア} = \underline{2} \quad \text{イ} = \underline{5}$$

ド・モルガンの法則より、「 p かつ q 」の否定は「 p でない、または q でない」。

$x \geq 2$ の否定は $x < 2$ 、 $y \leq 5$ の否定は $y > 5$ 。

$$x < 2 \quad \text{または} \quad y > 5$$

9

2次関数：平方完成

$y = x^2 - 8x + 10$ を平方完成し、頂点の座標を求めよ。

$$\text{頂点の}x\text{座標} \quad \underline{4} \quad \text{頂点の}y\text{座標} \quad \underline{-6}$$

x の係数 -8 の半分は -4 、2乗すると16。

$$y = x^2 - 8x + 16 - 16 + 10 = (x - 4)^2 - 6$$

$$\text{頂点}(4, -6)$$

10

2次関数：2次方程式

$x^2 - 5x + 6 = 0$ を解け。

$$x = \underline{2, 3}$$

積が6、和が -5 になる2数は -2 と -3 。

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$x = 2, 3$$

11

2次関数：2次不等式

 $x^2 - 9 < 0$ を解け。

$$\text{ア} < x < \text{イ} : \text{ア} = \underline{-3} \quad \text{イ} = \underline{3}$$

 $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ 。交点は $x = -3, 3$ 。 $y < 0$ なので内側型。

$$-3 < x < 3$$

12

2次関数：最大値・最小値（区間指定なし）

 $y = 2x^2 - 4x + 5$ の最小値を求めよ。

$$\text{最小値} \quad \underline{3} \quad \text{そのとき } x = \underline{1}$$

$$y = 2(x^2 - 2x) + 5 = 2((x - 1)^2 - 1) + 5 = 2(x - 1)^2 - 2 + 5 = 2(x - 1)^2 + 3$$

下に凸なので頂点で最小。

$$x = 1 \text{ のとき最小値 } 3$$

13

図形と計量：三角比の定義

直角三角形で、隣辺5・対辺12・斜辺13のとき、 $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ を求めよ。

$$\sin \theta = \underline{12/13} \quad \cos \theta = \underline{5/13} \quad \tan \theta = \underline{12/5}$$

 θ から見て、隣辺5・対辺12・斜辺13。定義にそのまま当てはめる。

$$\sin \theta = \frac{12}{13}, \cos \theta = \frac{5}{13}, \tan \theta = \frac{12}{5}$$

$$\sin \theta = \frac{12}{13}, \cos \theta = \frac{5}{13}, \tan \theta = \frac{12}{5}$$

14

図形と計量：三角比の相互関係

θ は鋭角で $\sin \theta = \frac{3}{5}$ のとき、 $\cos \theta$, $\tan \theta$ を求めよ。

$$\cos \theta = \underline{\underline{4/5}} \quad \tan \theta = \underline{\underline{3/4}}$$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より $\cos^2 \theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$ 。 θ は鋭角なので $\cos \theta > 0$ 、よって

$$\cos \theta = \frac{4}{5}。$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}$$

$$\cos \theta = \frac{4}{5}, \tan \theta = \frac{3}{4}$$

15

図形と計量：正弦定理

三角形ABCの外接円の半径が $R = 5$ 、辺 $a = 6$ のとき、 $\sin A$ の値を求めよ。

$$\sin A = \underline{\underline{3/5}}$$

正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = 2R$ より $\sin A = \frac{a}{2R} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$$\sin A = \frac{3}{5}$$

16

図形と計量：面積公式

$a = 6$, $b = 8$, $C = 30^\circ$ の三角形の面積 S を求めよ。

$$S = \underline{\underline{12}}$$

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \frac{1}{2} = 12$$

$$S = 12$$

17

データの分析：代表値

データ4, 7, 7, 9, 13の平均値と中央値を求めよ。

平均値 8 中央値 7

平均値： $(4 + 7 + 7 + 9 + 13) \div 5 = 40 \div 5 = 8$

中央値：すでに小さい順に並んでいるので、真ん中（3番目）の値7。

平均値8、中央値7

18

データの分析：四分位数

データ2, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 15（すでに小さい順）の第1四分位数 Q_1 と第3四分位数 Q_3 を求めよ。

$Q_1 =$ 4 $Q_3 =$ 11

データ数8は偶数なので、そのまま半分に分ける。

下組：2, 3, 5, 7 → 中央値（ Q_1 ）は $(3 + 5) \div 2 = 4$

上組：8, 10, 12, 15 → 中央値（ Q_3 ）は $(10 + 12) \div 2 = 11$

$Q_1 = 4, Q_3 = 11$

19

データの分析：分散

データ1, 2, 3, 4, 5の分散 V を求めよ。

$V =$ 2

平均は $(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \div 5 = 3$ 。

偏差は-2, -1, 0, 1, 2、偏差の2乗は4, 1, 0, 1, 4、その和は10。

$V = 10 \div 5 = 2$

$V = 2$

平均50、分散16のデータについて、全員の値を3倍したときの新しい平均・分散・標準偏差を求めよ。

平均 150 分散 144 標準偏差 12

全員を b 倍すると、平均も b 倍、分散は b^2 倍、標準偏差は $|b|$ 倍になる。 $b = 3$ なので

平均： $50 \times 3 = 150$

分散： $16 \times 3^2 = 16 \times 9 = 144$

標準偏差： $\sqrt{144} = 12$ （もとの標準偏差 $\sqrt{16} = 4$ を3倍しても同じ）

平均150、分散144、標準偏差12

標準 (21~34)

$\frac{1}{3 - \sqrt{7}}$ を有理化せよ。

($\sqrt{7} + 3$) / 2

分母・分子に共役 $3 + \sqrt{7}$ をかける。

$$\frac{1}{3 - \sqrt{7}} = \frac{3 + \sqrt{7}}{(3 - \sqrt{7})(3 + \sqrt{7})} = \frac{3 + \sqrt{7}}{9 - 7} = \frac{3 + \sqrt{7}}{2}$$

$$\frac{1}{3 - \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7} + 3}{2}$$

$|x - 3| \geq 5$ を解け。解は $x \leq \text{ア}$ または $x \geq \text{イ}$ の形になる。

ア = -2 イ = 8

$|x - 3| \geq 5$ は「点3からの距離が5以上」の範囲。

$x - 3 \geq 5$ より $x \geq 8$ 、または $x - 3 \leq -5$ より $x \leq -2$ 。

$x \leq -2$ または $x \geq 8$

整数 n について、「 n^2 が偶数ならば n は偶数である」ことを、対偶を利用して証明せよ。

この命題の対偶は「 n が奇数ならば n^2 は奇数である」。もとの命題と対偶は真偽が必ず一致するので、対偶を証明すればよい。

n が奇数のとき、ある整数 k を用いて $n = 2k + 1$ とおける。

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

$2k^2 + 2k$ は整数だから、 n^2 は「 $2 \times \text{整数} + 1$ 」の形、すなわち奇数である。

したがって対偶「 n が奇数ならば n^2 は奇数である」は真であり、対偶が真であればもとの命題も真である。

対偶「 n が奇数ならば n^2 は奇数」を示すことで、もとの命題「 n^2 が偶数ならば n は偶数」が証明された。

全体集合 U を1以上30以下の自然数とする。 A を2の倍数の集合、 B を5の倍数の集合とすると、 $\overline{A \cap B}$ （どちらの倍数でもない数の集合）の要素の個数を求めよ。

$$n(\overline{A \cap B}) = \underline{12}$$

ド・モルガンの法則より $\overline{A \cap B} = \overline{A \cap B}$ 。まず $n(A \cup B)$ を求める。

$$n(A) = 15 \text{ (2の倍数、 } 30 \div 2\text{)}, n(B) = 6 \text{ (5の倍数、 } 30 \div 5\text{)}, n(A \cap B) = 3 \text{ (10の倍数、 } 30 \div 10\text{)}$$

$$n(A \cup B) = 15 + 6 - 3 = 18$$

$$n(\overline{A \cap B}) = n(U) - n(A \cap B) = 30 - 18 = 12$$

12個

$y = x^2 - 2ax + 3$ ($0 \leq x \leq 4$) について、 $a = 6$ のときの最小値を求めよ。

$$\text{最小値 } \underline{-29} \quad \text{そのとき } x = \underline{4}$$

$y = (x - a)^2 + 3 - a^2$ 、軸は $x = a$ 。 $a = 6$ のとき軸 $x = 6$ は区間 $[0, 4]$ より右側 → 区間内はずっと減少。

$$\text{最小は右端 } x = 4。y = 4^2 - 2 \times 6 \times 4 + 3 = 16 - 48 + 3 = -29。$$

$x = 4$ のとき最小値 -29

物体を投げ上げたときの t 秒後の高さが $h = -5t^2 + 30t$ (m) で表される。高さが40m以上になる時間 t の範囲を求めよ。

$$ア \leq t \leq イ : ア = \underline{2} \quad イ = \underline{4}$$

条件は $h \geq 40$ なので

$$-5t^2 + 30t \geq 40$$

$$-5t^2 + 30t - 40 \geq 0$$

両辺を -5 で割ると（不等号が反転）

$$t^2 - 6t + 8 \leq 0$$

$$(t - 2)(t - 4) \leq 0$$

$$2 \leq t \leq 4$$

三角形の3辺の長さが7, 8, 13のとき、最大辺13の対角 θ の余弦の値を求め、この三角形が鋭角三角形・直角三角形・鈍角三角形のどれになるか答えよ。

$$\cos \theta = \underline{-1/2} \quad \text{種類} \quad \underline{\text{鈍角}}$$

$$\text{余弦定理より} \cos \theta = \frac{7^2 + 8^2 - 13^2}{2 \times 7 \times 8} = \frac{49 + 64 - 169}{112} = \frac{-56}{112} = -\frac{1}{2}$$

$\cos \theta < 0$ なので θ は鈍角。最大辺の対角が鈍角であることから、この三角形は鈍角三角形である。

$$\cos \theta = -\frac{1}{2}, \text{鈍角三角形}$$

三角形ABCで $a = 5$, $b = 8$, $C = 60^\circ$ のとき、辺 c の長さと言積 S を求めよ。

$$c = \underline{7} \quad S = \underline{10\sqrt{3}}$$

余弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 25 + 64 - 2 \times 5 \times 8 \times \frac{1}{2} = 89 - 40 = 49$ 、よって $c = 7$ 。

$$\text{面積公式：} S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 5 \times 8 \times \sin 60^\circ = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

$$c = 7, S = 10\sqrt{3}$$

データ5, 6, 7, 9, 13の分散 V と標準偏差 s を、近道公式 $V = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$ を用いて求めよ。

$$V = \underline{8} \quad s = \underline{2\sqrt{2}}$$

$$\text{平均：} (5 + 6 + 7 + 9 + 13) \div 5 = 40 \div 5 = 8$$

$$\text{2乗の平均：} (25 + 36 + 49 + 81 + 169) \div 5 = 360 \div 5 = 72$$

$$V = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 72 - 8^2 = 72 - 64 = 8$$

$$s = \sqrt{V} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$V = 8, s = 2\sqrt{2}$$

相関係数 r について、次の(1)～(4)のうち正しいものをすべて選べ。

- (1) $-1 \leq r \leq 1$ が必ず成り立つ
- (2) $r = 0$ ならば x と y の間に関係は全くない
- (3) 外れ値が1つ混ざるだけで r の値が大きく変わることがある
- (4) 相関があれば必ず因果関係がある

正しいものの番号（小さい順にコンマ区切り） 1,3

- (1) 相関係数の定義から必ず成り立つ。正しい。
- (2) $r = 0$ は「直線的な関係が見られない」という意味であり、曲線的な関係が全くないとは言えない。誤り。
- (3) 相関係数は外れ値の影響を受けやすい。正しい。
- (4) 相関があっても、それだけでは因果関係があるとは言えない（第三の要因が原因である場合もある）。誤り。

正しいのは(1)と(3)

2辺の長さの和が10、その間の角が 60° の三角形がある。一方の辺の長さを x ($0 < x < 10$) として、面積 S が最大になる x の値と、そのときの最大値を求めよ。

$$x = \underline{5} \quad \text{最大値 } S = \underline{25\sqrt{3}/4}$$

もう一方の辺は $10 - x$ 。面積公式より

$$S = \frac{1}{2}x(10 - x) \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}(10x - x^2)$$

x^2 の項に注目して平方完成する。 $10x - x^2 = -(x^2 - 10x) = -((x - 5)^2 - 25) = -(x - 5)^2 + 25$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}(-(x - 5)^2 + 25) = -\frac{\sqrt{3}}{4}(x - 5)^2 + \frac{25\sqrt{3}}{4}$$

上に凸なので、 $x = 5$ (区間 $0 < x < 10$ の中にある) で最大値 $\frac{25\sqrt{3}}{4}$ 。

$$x = 5 \text{ のとき最大値 } S = \frac{25\sqrt{3}}{4}$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ で $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ のとき、 $\sin \theta \cos \theta$ の値を求めよ。

$$\sin \theta \cos \theta = \underline{-3/8}$$

与式の両辺を2乗する。展開公式 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ を使うと

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$$

相互関係 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を使って整理すると

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\frac{1}{4} = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$

$$\sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

2次方程式 $x^2 + ax + 1 = 0$ が実数解を持たないための必要十分条件を、定数 a の範囲で求めよ。

$$ア < a < イ : ア = \underline{-2} \quad イ = \underline{2}$$

「実数解を持たない $\iff D < 0$ 」は必要十分条件そのもの。判別式は

$$D = a^2 - 4$$

$$D < 0 \text{ より } a^2 < 4, \text{ よって } -2 < a < 2$$

$$-2 < a < 2$$

あるデータの平均は50、標準偏差は4である。「平均から標準偏差の2倍以上離れた値」を外れ値の目安とすると、その範囲を絶対値を用いた不等式で表し、解け。

$$x \leq ア \text{ または } x \geq イ : ア = \underline{42} \quad イ = \underline{58}$$

標準偏差の2倍は $2 \times 4 = 8$ 。「平均からの距離が8以上」なので

$$|x - 50| \geq 8$$

型 ($|x - a| \geq b \rightarrow x \leq a - b$ または $x \geq a + b$) にあてはめると

$$x \leq 50 - 8 = 42 \quad \text{または} \quad x \geq 50 + 8 = 58$$

$$x \leq 42 \text{ または } x \geq 58$$

三角形ABCにおいて $BC = a = 6$ 、 $\angle A = 60^\circ$ とする。まず外接円の半径 R を求めよ。次に、 $AB = c$ 、 $AC = b$ とし $b + c = 8$ のとき、この三角形の面積 S を求めよ。

$$R = \underline{2\sqrt{3}} \quad S = \underline{\frac{7\sqrt{3}}{3}}$$

正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = 2R$ より

$$2R = \frac{6}{\sin 60^\circ} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}、\text{よって} R = 2\sqrt{3}$$

次に面積 S を求めるには bc の値が必要だが、 $b + c = 8$ だけでは b, c は1通りに決まらない。そこで $a = 6$ という情報を、余弦定理を使って bc を特定するために使う。

余弦定理より $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ 。ここで $b^2 + c^2 = (b + c)^2 - 2bc$ と書き換えると

$$a^2 = (b + c)^2 - 2bc - 2bc \cos A = (b + c)^2 - 2bc(1 + \cos A)$$

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ なので $1 + \cos A = \frac{3}{2}$ 。 $a = 6$ 、 $b + c = 8$ を代入すると

$$36 = 64 - 2bc \times \frac{3}{2} = 64 - 3bc$$

$$3bc = 64 - 36 = 28、\text{よって} bc = \frac{28}{3}$$

(このとき b, c は $t^2 - 8t + \frac{28}{3} = 0$ の2解で、実際に $b = 4 + \sqrt{\frac{20}{3}}$ 、 $c = 4 - \sqrt{\frac{20}{3}}$

(またはその逆) という実数の三角形になることが確かめられる。)

面積公式より

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times \frac{28}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{28\sqrt{3}}{12} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

$$R = 2\sqrt{3}、S = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

n 個のデータ $x_1, x_2, \dots, x_n$ の分散を V とする。定数 c, d を用いて新しいデータ $y_1, y_2, \dots, y_n$ を $y_i = cx_i + d$ ($i = 1, \dots, n$) で作るとき、 y の分散が c^2V になることを、分散の定義式 $V = \frac{1}{n}\{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2\}$ を用いて証明せよ。

まず y の平均 $\bar{y}$ を求める。

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n) = \frac{1}{n}\{(cx_1 + d) + (cx_2 + d) + \dots + (cx_n + d)\} \\ &= c \cdot \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + d = c\bar{x} + d\end{aligned}$$

次に、各データと平均との差（偏差）を計算する。

$$y_i - \bar{y} = (cx_i + d) - (c\bar{x} + d) = c(x_i - \bar{x})$$

これは、 y の偏差がもとの x の偏差のちょうど c 倍になっていることを示している。両辺を2乗すると

$$(y_i - \bar{y})^2 = c^2(x_i - \bar{x})^2$$

これを $i = 1$ から n まで、つまりすべてのデータについて足し合わせ、 n で割ると y の分散 V_y になる。

$$\begin{aligned}V_y &= \frac{1}{n}\{(y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \dots + (y_n - \bar{y})^2\} = \frac{1}{n}\{c^2(x_1 - \bar{x})^2 + c^2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + c^2(x_n - \bar{x})^2\} \\ &= c^2 \cdot \frac{1}{n}\{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2\} = c^2V\end{aligned}$$

（最後の変形で、 c^2 はどの項にも共通な定数なので、和全体の外にくくり出せることを使った。）

$y_i = cx_i + d$ のとき、 $y_i - \bar{y} = c(x_i - \bar{x})$ となることから、 y の分散は c^2V になる。

三角形の3辺の長さが x , $x+1$, $x+2$ ($x > 0$) であり、この三角形が鈍角三角形であるとき、 x の値の範囲を求めよ。

$$ア < x < イ : ア = \underline{1} \quad イ = \underline{3}$$

最大辺は $x+2$ なので、その対角を θ とすると、鈍角三角形 $\iff \cos \theta < 0$ 。余弦定理より

$$\cos \theta = \frac{x^2 + (x+1)^2 - (x+2)^2}{2x(x+1)}$$

$x > 0$ より分母 $2x(x+1) > 0$ なので、符号は分子だけで決まる。分子を因数分解する。

$$\begin{aligned} x^2 + (x+1)^2 - (x+2)^2 &= x^2 + (x^2 + 2x + 1) - (x^2 + 4x + 4) = x^2 - 2x - 3 \\ &= (x-3)(x+1) \end{aligned}$$

$x > 0$ より $x+1 > 0$ なので、 $(x-3)(x+1) < 0 \iff x-3 < 0 \iff x < 3$ 。

さらに、三角形が成立するための条件（最も短い2辺の和が最大辺より大きい）も確認する必要がある。

$$x + (x+1) > x+2 \quad \text{より} \quad x > 1$$

（他の2つの組み合わせは $x > 0$ であれば自動的に成り立つ）

以上をあわせると $1 < x < 3$ 。

$$1 < x < 3$$

命題「 $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ ならば $x^2 - (a + 1)x + a \leq 0$ 」がつねに真となるように、定数 a の値の範囲を求めよ。

$$a \geq \underline{3}$$

まず仮定の不等式を解く。 $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3) \leq 0$ より $1 \leq x \leq 3$ 。この解集合を $P = [1, 3]$ とする。

次に結論の不等式を因数分解する。 $x^2 - (a + 1)x + a = (x - 1)(x - a)$ （展開して確認： $x^2 - (a + 1)x + a$ と一致する）。

命題が真であるためには、 $P = [1, 3]$ のすべての x が $(x - 1)(x - a) \leq 0$ を満たす必要がある。すなわち $P \subset Q$ （ Q は結論の不等式の解集合）。

$a \geq 1$ のとき $Q = [1, a]$ なので、 $[1, 3] \subset [1, a]$ となるには $a \geq 3$ が必要。

$a < 1$ のとき $Q = [a, 1]$ となり、上端が1より右に広がらないため $x = 3$ を含めることができず、条件を満たせない。

以上より $a \geq 3$ 。

$$a \geq 3$$

2つのデータ群A、Bの分散をそれぞれ V_A 、 V_B 、標準偏差をそれぞれ s_A 、 s_B とする。「 $s_A < s_B$ 」が成り立つことは、「 $V_A < V_B$ 」が成り立つための何条件か答えよ。

答え (十分条件 / 必要条件 / **必要十分条件** / どちらでもない)

標準偏差は分散の正の平方根、つまり $s_A = \sqrt{V_A}$ 、 $s_B = \sqrt{V_B}$ ($V_A, V_B \geq 0$) である。

0以上の2つの数では、大きい数の方が平方根も大きい ($0 \leq p < q$ ならば $\sqrt{p} < \sqrt{q}$) という性質があるので、 $V_A < V_B$ ならば必ず $\sqrt{V_A} < \sqrt{V_B}$ 、すなわち $s_A < s_B$ が成り立つ ($V_A < V_B \Rightarrow s_A < s_B$)。

逆に $s_A < s_B$ 、すなわち $\sqrt{V_A} < \sqrt{V_B}$ ならば、両辺を2乗しても不等号の向きは変わらない (両辺とも0以上だから) ので $V_A < V_B$ が成り立つ ($s_A < s_B \Rightarrow V_A < V_B$)。

両方向の矢印が真なので、必要十分条件である。

必要十分条件

命題「実数 x について、 $x^2 - 5x + 6 = 0$ ならば $|x - 2| \cdot |x - 3| = 0$ である」の真偽をアで答えよ。また、この命題の逆の真偽をイで答えよ（「真」または「偽」で入力）。

ア = (真) / 偽 イ = (真) / 偽

$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ と因数分解できるので、 $x^2 - 5x + 6 = 0$ ならば $(x - 2)(x - 3) = 0$ である。

ここで絶対値の性質 $|a| \cdot |b| = |ab|$ を使うと、 $|x - 2| \cdot |x - 3| = |(x - 2)(x - 3)| = |x^2 - 5x + 6|$ 。仮定より $x^2 - 5x + 6 = 0$ なので $|x^2 - 5x + 6| = 0$ 。したがって元の命題は真（ア＝真）。

逆「 $|x - 2| \cdot |x - 3| = 0$ ならば $x^2 - 5x + 6 = 0$ である」を調べる。 $|x - 2| \cdot |x - 3| = 0$ ならば $x = 2$ または $x = 3$ 。

$x = 2$ のとき： $2^2 - 5 \times 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$ （成り立つ）

$x = 3$ のとき： $3^2 - 5 \times 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$ （成り立つ）

どちらの場合も $x^2 - 5x + 6 = 0$ が成り立つので、逆も真（イ＝真）。

（ $(x - 2)(x - 3) = 0$ と $|x - 2||x - 3| = 0$ は、絶対値の積がもとの積の絶対値に等しいという性質から、実は同じ意味の式になっている。）

元の命題は真、逆も真（どちらも真＝必要十分条件になっている）

EXAM

共通テスト形式チャレンジ

大問1 目標時間 12分／配点 20点

太郎さんと花子さんは、文化祭の模擬店で使う三角形の看板を作ることにした。2辺の長さの和を8m、その間の角を 60° に固定して、面積が最大になるように2辺の長さを決めたい。

先生「まず面積を1つの文字の式で表してみよう。」

太郎「一方の辺の長さを x mとおくと、もう一方は $(8 - x)$ mになりますね。」

(1)

面積を S (m²) とすると、 $S = \frac{1}{2}x(8 - x) \sin 60^\circ$ である。これを整理すると

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}(-x^2 + \boxed{\text{ア}}x)$$

となる。さらに平方完成すると

$$S = -\frac{\sqrt{3}}{4}(x - \boxed{\text{イ}})^2 + \boxed{\text{ウ}}\sqrt{3}$$

となる。ア、イ、ウの値を求めよ。

ア 8 イ 4 ウ 4

$$S = \frac{1}{2}x(8 - x) \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times x(8 - x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(8x - x^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}(-x^2 + 8x)$$

よってア=8。

$$x^2 \text{の項に注目して平方完成する。} -x^2 + 8x = -(x^2 - 8x) = -((x - 4)^2 - 16) = -(x - 4)^2 + 16$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}(-(x - 4)^2 + 16) = -\frac{\sqrt{3}}{4}(x - 4)^2 + 4\sqrt{3}$$

よってイ=4、ウ=4。

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}(-x^2 + 8x) = -\frac{\sqrt{3}}{4}(x-4)^2 + 4\sqrt{3}$$

(2)

花子「2辺の長さの和が8である以上、 x のとりうる範囲にも注意しないといけな
いね。」 x と $8-x$ がともに正の実数となる x の範囲は $\boxed{\text{エ}} < x < \boxed{\text{オ}}$ である。

エ、オの値を求めよ。さらに、(1)で求めた頂点の x 座標 $\boxed{\text{イ}}$ がこの範囲に含まれ
ることを確かめると、面積の最大値は $\boxed{\text{カ}}\sqrt{3}$ (m²) であるとわかる。カの値を
求めよ。

エ 0 オ 8 カ 4

辺の長さは正の実数でなければならないので、 $x > 0$ かつ $8-x > 0$ （すなわち
 $x < 8$ ）。

あわせると $0 < x < 8$ 。よってエ=0、オ=8。

(1)で求めた頂点の x 座標4（イの値）は、この範囲 $0 < x < 8$ にちゃんと含まれて
いる。したがって $x = 4$ のとき、(1)で求めた最大値 $4\sqrt{3}$ （ウの値）がそのまま実
現できる。よってカ=4。

$0 < x < 8$ （頂点 $x = 4$ はこの範囲に含まれるので、最大値 $4\sqrt{3}$ は実現できる）

(3)

花子「同じ考え方を使えば、2辺の和が10、挟角が90°の三角形でも、最大の面
積が求められるはずだね。」(1)を振り返ると、和が8のときは $x = 4 = 8 \div 2$

（和の半分）で面積が最大になっていた。この結果を使うと、2辺の和が10、挟
角が90°の場合の面積の最大値は $\boxed{\text{キク}}/\boxed{\text{ケ}}$ (m²) の形になる。キク、ケの値
を求めよ。

キク 25 ケ 2

一方の辺を x 、もう一方を $(10-x)$ とすると

$$S = \frac{1}{2}x(10-x)\sin 90^\circ = \frac{1}{2}x(10-x) \quad (\sin 90^\circ = 1 \text{なので係数に根号は出て
こない})$$

(1)と同じ形に平方完成すると $S = \frac{1}{2}(-(x-5)^2 + 25) = -\frac{1}{2}(x-5)^2 + \frac{25}{2}$
となり、頂点は $x = 5 = 10 \div 2$ 。これは(1)で見た「和の半分で最大になる」とい

う結果とちょうど一致している。 $x = 5$ は範囲 $0 < x < 10$ の中にあるので、最大値がそのまま実現できる。よってキク=25、ケ=2。

$$\text{最大値 } S = \frac{25}{2} = 12.5 \quad (x = 5 \text{ のとき})$$

大問2 目標時間 12分／配点 20点

花子さんのクラス40人に、部活動Aと部活動Bへの参加状況をアンケートで調査した。Aに参加している生徒は18人、Bに参加している生徒は15人、AとBの両方に参加している生徒は6人だった。

先生「どちらの部活動にも参加していない生徒の中から何人か抽出して、別の調査をしてみよう。」

- (1) Aに参加している生徒の集合をA、Bに参加している生徒の集合をBとする。少なくとも一方に参加している人数 $n(A \cup B) = \boxed{\text{アイ}}$ 人であり、どちらにも参加していない人数は $\boxed{\text{ウエ}}$ 人である。

アイ 27 ウエ 13

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 18 + 15 - 6 = 27$$

どちらにも参加していない人数は、全体からこれを引けばよい。

$$40 - 27 = 13$$

$n(A \cup B) = 27$ 人、どちらにも参加していない人は13人

- (2) どちらの部活動にも参加していない生徒の中から6人を抽出し、別の小テストを実施したところ、得点は69, 72, 75, 75, 78, 81であった。この6人の得点の平均値は $\boxed{\text{オカ}}$ 、分散は $\boxed{\text{キク}}$ である。オカ、キクの値を求めよ。また、(1)で求めた $\boxed{\text{ウエ}}$ 人のうち、今回抽出された6人はおよそ $\boxed{\text{ケ}}$ 割（小数第1位を四捨五入）にあたる。ケの値を求めよ。

オカ 75 キク 15 ケ 5

平均値： $(69 + 72 + 75 + 75 + 78 + 81) \div 6 = 450 \div 6 = 75$

偏差は $-6, -3, 0, 0, 3, 6$ 、偏差の2乗は $36, 9, 0, 0, 9, 36$ 、その和は 90 。

分散： $90 \div 6 = 15$

よってオカ $=75$ 、キク $=15$ 。

また、(1)で求めた13人（ウエの値）のうち6人が抽出されたので、その割合は $6 \div 13 = 0.4615\dots$ 。これを「割」の単位（全体を10割とする）で表すと $4.615\dots$ 割となり、小数第1位を四捨五入すると5割。よってケ $=5$ 。

平均値75、分散15、13人のうちおよそ5割を抽出

(3)

(2)の分散15より、標準偏差は $\sqrt{15}$ （およそ3.87）である。この6人の得点のうち、平均75から最も離れている得点は、平均との差がコ点である。また、その差は標準偏差の2倍 $2\sqrt{15}$ （およそ7.75）と比べてどうか。サに当てはまるものを、次の0・1のうちから一つ選べ。

0：小さいといえる　1：小さいとはいえない

コ 6　サ 0

平均75から最も離れているのは69（差6）と81（差6）で、どちらも差は6点。よってコ $=6$ 。

標準偏差の2倍は $2\sqrt{15} \approx 7.75$ 。 $6 < 7.75$ なので、差はこの目安より小さいといえる（サ $=0$ ）。つまりこのデータには、この基準で見ると外れ値と呼べるほど大きくずれた値はない。

最大の差は6点。 $6 < 2\sqrt{15}$ なので目安より小さい（外れ値はない）

大問3　目標時間 11分／配点 20点

ある工場では、部品の性能値 x が2次不等式 $x^2 - 6x + 8 \leq 0$ を満たすとき「合格」と判定する。

花子「先生、これって集合や条件の考え方でも整理できそうですね。」

先生「そうだね。合格の条件を、必要条件・十分条件の言葉で考えてみよう。」

(1) 不等式 $x^2 - 6x + 8 \leq 0$ を解け。解は $\boxed{\text{ア}} \leq x \leq \boxed{\text{イ}}$ の形になる。

ア 2 イ 4

積が8、和が-6になる2数は-2と-4。

$x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$ 。交点は $x = 2, 4$ 。 $y \leq 0$ （等号つき）なので境界を含む内側型。

$$2 \leq x \leq 4$$

(2) 別の条件として「 $3 \leq x \leq 5$ 」を条件 r とする。「 r が成り立つならば合格である」という命題の真偽は $\boxed{\text{ウ}}$ 、逆に「合格ならば r が成り立つ」という命題の真偽は $\boxed{\text{エ}}$ である。 $\boxed{\text{ウ}}$ 、 $\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを、それぞれ次の0・1のうちから一つ選べ。

0：真 1：偽

ウ 1 エ 1

r の範囲は $3 \leq x \leq 5$ 、合格の範囲は(1)より $2 \leq x \leq 4$ 。

「 $r \Rightarrow$ 合格」： $x = 5$ は r を満たすが、 $2 \leq x \leq 4$ には含まれない（合格ではない）。反例があるので偽（ウ＝偽）。

「合格 $\Rightarrow r$ 」： $x = 2$ は合格の範囲だが、 $3 \leq x \leq 5$ には含まれない（ r を満たさない）。反例があるので偽（エ＝偽）。

どちらの命題も偽（ $2 \leq x \leq 4$ と $3 \leq x \leq 5$ は互いにもう一方を含んでいない）

(3) 条件を「 $2 \leq x \leq c$ 」（ c は $c \geq 2$ を満たす定数）とする。これが「合格」であるための必要十分条件になるように、 c の値を求めよ。 $c = \boxed{\text{オ}}$ の形で答えよ。

オ 4

「 $2 \leq x \leq c$ 」が「合格 ($2 \leq x \leq 4$)」であるための必要十分条件になるということは、2つの条件が表す範囲が完全に一致すること。

$[2, c] = [2, 4]$ となるのは $c = 4$ のときだけである。よって $c = 4$ 。

$$c = 4$$

DRILL

記述チャレンジ

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。模範解答と見比べて、書き方の型を身につけよう。

記1 数Iの5つの章は、一見すると別々のテーマに見えるが、共通する考え方でつながっている部分がある。次の(a)(b)の2点を通して、そのつながりを説明せよ。

(a) 2次方程式の判別式 D の符号による場合分けと、「集合と命題」で学んだ必要十分条件の考え方の関係。

(b) 「データの分析」の仮説検定の考え方と、「集合と命題」で学んだ背理法の論理の型がどう対応しているか。

(a) 2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が実数解をもつかどうかを調べるとき、「 $D > 0$ なら異なる2つの実数解、 $D = 0$ ならただ1つの実数解、 $D < 0$ なら実数解なし」と場合分けするが、この場合分けの根拠は、実は「実数解をもつ $\iff D \geq 0$ 」という必要十分条件そのものである。判別式の符号を調べるという計算作業は、この必要十分条件の左辺（実数解をもつかどうか）を、右辺（ D の符号という調べやすい条件）に置き換えて判定している、と言い換えることができる。2次不等式の解の場合分け（ $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$ で解の形が変わる）も、同じ必要十分条件の応用にすぎない。

(b) 仮説検定は、次のような手順で判断を下す：(1)ある仮説が正しいと仮定する。(2)その仮定のもとでは、今回観測されたような結果が起こる確率がどれくらいかを計算する。(3)その確率が、あらかじめ決めた基準（多くの場合5%）より小さければ、「仮定が正しいとしたら、こんなにめったに起きないことが起きるのはおかしい」と考え、仮説を疑って棄却する。

この手順は、背理法の「(1)結論を否定して、それが成り立つと仮定する。(2)その仮定から矛盾を導く。(3)矛盾が生じた以上、仮定が誤りだったと判断し、もとの結論を採用する」という論理の型と非常によく似ている。どちらも「ある仮定のもとで、都合の悪いこと（矛盾、あるいはめったに起こらないこと）が起きることを示し、その仮定自体を疑う」という構造をもっている。ただし、背理法は数学的に必ず矛盾を導いて仮定を完全に退けるのに対し、仮説検定は「確率的にめったに起こらない」ことを根拠にしており、100%の確実性ではなく、あくまである基準にもとづく判断である、という違いがある点には注意しておきたい。

(a) 判別式の符号による場合分けは、「実数解をもつ $\iff D \geq 0$ 」という必要十分条件を、調べやすい形（ D の符号）に置き換えて判定しているだけである。(b) 仮説検定の「仮定 $\rightarrow$ めったに起こらないことが起きた $\rightarrow$ 仮定を疑う」という手順は、背理法の「仮定 $\rightarrow$ 矛盾を導く $\rightarrow$ 仮定を退ける」という論理の型と対応している。ただし仮説検定の根拠は確率的なものであり、数学的に必ず矛盾を導く背理法ほどの確実性はない。

記2 2次関数 $y = 2(x - 3)^2 - 4$ のグラフ上で、 x 座標が1, 2, 3, 4, 5である5つの点の y 座標をすべて求めよ。さらに、この5つの y 座標の平均値を、(1) 5つの値をすべて計算してから平均する方法と、(2) グラフの対称性を利用して一部の計算を省く方法の、両方で求め、一致することを確認めよ。

まず5つの y 座標を計算する。 $y = 2(x - 3)^2 - 4$ に $x = 1, 2, 3, 4, 5$ を代入する。

$$x = 1 : y = 2(1 - 3)^2 - 4 = 2 \times 4 - 4 = 4$$

$$x = 2 : y = 2(2 - 3)^2 - 4 = 2 \times 1 - 4 = -2$$

$$x = 3 : y = 2(3 - 3)^2 - 4 = 2 \times 0 - 4 = -4$$

$$x = 4 : y = 2(4 - 3)^2 - 4 = 2 \times 1 - 4 = -2$$

$$x = 5 : y = 2(5 - 3)^2 - 4 = 2 \times 4 - 4 = 4$$

(1) すべて計算してから平均する方法：5つの y 座標は4, -2, -4, -2, 4。

$$\text{平均値} = \frac{4 + (-2) + (-4) + (-2) + 4}{5} = \frac{0}{5} = 0$$

(2) 対称性を利用する方法：この放物線の軸は $x = 3$ である。 $x = 1$ と $x = 5$ は軸 $x = 3$ を挟んで対称な位置（軸からの距離がどちらも2）にあるので、 y 座標は等しい（実際どちらも4）。同様に $x = 2$ と $x = 4$ も軸に対して対称なので y 座標は等しい（どちらも-2）。 $x = 3$ は軸そのもの（頂点）で $y = -4$ 。

したがって、5つの値の和は「対称な2組のペア」と「軸上の1点」に分けて

$$2 \times (\text{x=1のy座標}) + 2 \times (\text{x=2のy座標}) + (\text{x=3のy座標}) = 2 \times 4 + 2 \times (-2) + (-4) = 8 - 4 - 4 = 0$$

$$\text{平均値は} 0 \div 5 = 0。$$

(1) (2) どちらの方法でも平均値は0で一致した。(2)の方法は、すべての値を計算しなくても、軸に対して対称な点どうしは同じ y 座標をもつという2次関数のグラフの性質だけから、計算の手間を減らして同じ結論にたどり着けることを示している。データの平均値を求めるときも、データに規則的な対称性がないかをまず確認する習慣は、計算ミスを減らすうえでも役に立つ。

5つの y 座標は4, -2, -4, -2, 4で、平均値はどちらの方法でも0になる。放物線が軸 $x=3$ に対して対称であるため、 $x=1$ と $x=5$ 、 $x=2$ と $x=4$ はそれぞれ同じ y 座標をもち、この対称性を使うと計算を減らして同じ平均値にたどり着ける。